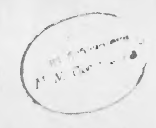


ВЪ ЦАРСТВѢ СМЕКАЛКИ.

Е. И. ИГНАТЬЕВЪ.



Е. И. Игнатьевъ.

ВЪ ЦАРСТВѢ СМЕКАЛКИ

или

АРИѲМЕТИКА ДЛЯ ВСѢХЪ.

КНИГА ДЛЯ СЕМЬИ И ШКОЛЫ.

Книга первая

(4-Е ПЕРЕСМОТРѢННОЕ ИЗДАНІЕ).

С.-ПЕТЕРБУРГЪ
1914

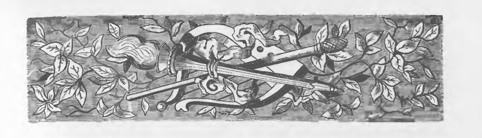
Тип. Т-ва А. С. Суворина—„Новое Время". Эртелевъ, 13

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ПРЕДИСЛОВІЕ КЪ ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНІЮ.

Въ настоящемъ четвертомъ изданіи первой книги «Въ царствѣ смекалки» по сравненію съ предыдущимъ ея изданіемъ не прибавлено новыхъ задачъ и упражненій. Исправлены лишь замѣченныя въ третьемъ изданіи опечатки, редактированы и дополнены почему либо нуждавшіяся въ этомъ задачи.

Существенное участіе въ этой работѣ принялъ В. И. Короленко, которому составитель считаетъ своимъ долгомъ выразить самую сердечную благодарность.



ВВЕДЕНІЕ.

I.

Изъ предисловій къ первымъ 3-мъ изданіямъ.

Наступили времена «пара и желѣза», электричества и воздухоплаванія, съ одной стороны, а съ другой, — времена проникновенія въ глубочайшіе тайники человѣческаго духа и самопознанія. Но въ какой бы области человѣческая жизнь ни стремилась къ необходимому самосовершенствованію, несомнѣнно то, что всюду въ основаніи вѣрныхъ выводовъ должны лежать «счетъ и мѣра», т. е. число въ той или иной формѣ. Явленія ли внѣшняго міра, глубины ли собственнаго духа желаетъ изслѣдовать человѣкъ и сказать свое бѣдное и жалкое «я» съ великимъ и всеобъемлющимъ «все»—всюду и вездѣ только тогда шествуетъ онъ по вѣрному пути, если великій и строгій духъ математики будетъ имъ руководить.

Счетъ, мѣра и число... Математика—эта «сухая» и «строгая» наука... Да! только эта цѣломудренная, съ глубоко-пытливымъ взглядомъ богиня можетъ ввести насъ въ святое святыхъ творенія, приподнять завѣсу, скрывающую отъ насъ великія тайны міросозданія, показать возможность пространствъ, отличныхъ отъ нашего, ввести въ область иныхъ измѣреній, дать возможность увѣренно говорить о невидимомъ, какъ о видимомъ,

о будущемъ и прошедшемъ, какъ о настоящемъ, дать понятіе человѣческому духу о великой и вѣчной поэзіи творческихъ силъ природы... Станетъ ли кто въ наше время отрицать настоятельную необходимость самаго широкаго распространенія и популяризаціи математическихъ знаній? Желѣзная сила логической или—что то же—математической мысли, сила разумной и быстрой «смекалки» только одна въ состояніи побѣдить разнаго рода безпочвенныя самообольщенія и низринуть дурачащіе бѣдное человѣчество кумиры.

Развитіе самой энергической самодѣятельности ума, сообразительности и «смекалки» — вотъ что все необходимѣе и необходимѣе дѣлается человѣку, если онъ желаетъ преуспѣвать и достигнуть гармоніи жизни. Существенно необходимо прежде всего пріобрѣтеніе самыхъ разнообразныхъ навыковъ въ счетѣ, мѣрѣ и числѣ. Нисколько не рискуя впасть въ преувеличеніе, повторимъ давно уже высказанную мысль: жизнь каждаго народа культурна по стольку, по скольку въ нее входитъ математика. Вдумайтесь, и вы съ этимъ согласитесь!

Вотъ почему, между прочимъ, первоначальныя математическія познанія должны необходимо входить съ самыхъ раннихъ лѣтъ въ наше образованіе и воспитаніе. По справедливому замѣчанію Кондорсе [1]) («Бесѣды о математикѣ»), математическія понятія, цифры и линіи говорятъ даже дѣтскому зарождающемуся воображенію болѣе, чѣмъ иные думаютъ. Но само собой разумѣется, что умственную *самодѣятельность*, сообразительность и «смекалку» нельзя ни «вдолбить», ни «вложить» ни въ чью голову. Результаты надежны единственно тогда, когда введеніе въ область математическихъ знаній совершается въ легкой и пріятной формѣ, на предметахъ и примѣрахъ обыденной и повседневной обстановки, подобранныхъ съ надлежащимъ остроуміемъ и занимательностью.

Впрочемъ, высказывая эти мысли, мы не говоримъ ничего новаго. Съ этими послѣдними положеніями согласится, кажется, нынѣ всякій педагогъ современной русской школы и всякая заботящаяся о разумномъ образованіи и воспитаніи своихъ дѣтей

---

[1]) 1743—1794 г.

семья. Тѣмъ болѣе удивительно и досадно, что на русскомъ языкѣ нѣтъ почти ни одной попытки дать въ руки семьи и школы книгу, направленную къ популяризаціи въ широкихъ кругахъ математическихъ познаній и могущую служить подходящимъ пособіемъ взрослому для обученія своего ребенка, или вообще учащемуся, послѣ нѣкоторой небольшой подготовки. Это тѣмъ болѣе удивительно и странно, что въ заграничной литературѣ мы имѣемъ въ этомъ отношеніи прекрасные и талантливо составленные образцы.

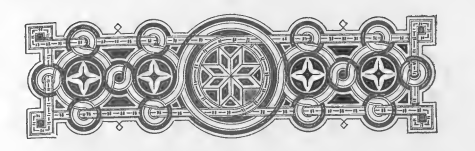
Предлагаемыя три книги имѣютъ въ виду до нѣкоторой степени пополнить указанный только что пробѣлъ. Пытаясь перенести читателя въ «царство смекалки», мы, конечно, не обольщаемъ себя надеждой, что смогли показать ему это царство во всей его прелести и полнотѣ. Для этого понадобились бы не три такихъ книги: такъ велика и обширна область только тѣхъ отдѣловъ математики, которые можно подвести подъ общее заглавіе «математическихъ игръ и развлеченій». Но что же можетъ помѣшать нашу попытку и продолжить, если она окажется удачной и полезной?

Внимательный читатель замѣтитъ, что каждая книга по возможности разбита на отдѣлы, содержащіе каждый однородныя задачи въ порядкѣ возрастанія ихъ трудности. Нѣтъ, вообще говоря, никакой надобности читать и разбираться въ такой книгѣ «подрядъ». Каждый можетъ для начала взять тотъ отдѣлъ, который его наиболѣе заинтересуетъ, и разобраться сначала въ немъ, затѣмъ перейти къ любому другому и т. д. Что касается до такъ называемыхъ «разныхъ» задачъ, то составитель и здѣсь старался по силѣ разумѣнія размѣстить ихъ въ порядкѣ возрастающей сложности или трудности. Нельзя, однако, поручиться, что принятая нами планировка матеріала удовлетворитъ всѣхъ. Слишкомъ субъективное это дѣло: что̀ одному дается трудно, то другому легко, и наоборотъ. Впрочемъ, подчеркиваемъ это еще разъ, предлагаемыя книги вѣдь не «методика», не «учебникъ» и не «задачникъ» въ обыкновенномъ смыслѣ этихъ словъ. Но всякій, кто захочетъ, можетъ воспользоваться предлагаемыми книгами примѣнительно къ своей методѣ или учебнику. Взрослый, взявши на себя трудъ познакомиться

съ любой книгой, легко убѣдится, что всѣ почти предлагаемыя въ ней задачи можно видоизмѣнять и дѣлать предметомъ бесѣды даже съ маленькими дѣтьми. Съ другой стороны, смѣемъ надѣяться, что предлагаемыя книги могутъ быть недурнымъ пособіемъ для математическаго *саморазвитія* и самодѣятельности и притомъ — не для одного только учащагося юношества, а для всѣхъ вообще, чувствующихъ склонность къ работѣ ума. Въ силу послѣдняго эти книги названы также «**Ариѳметикой для всѣхъ**». Предназначая эти книги *для всѣхъ*, мы вовсе не желаемъ сказать, что книги эти можетъ читать даже едва обучившійся грамотѣ ребенокъ. Но думаемъ, что мать, отецъ, старшій братъ или сестра найдутъ въ нихъ достаточно матеріала, чтобы на легкихъ и занимательныхъ примѣрахъ, при помощи предметовъ, находящихся у нихъ же передъ глазами, или подъ руками, ввести ребенка въ кругъ математическихъ понятій. Но, «уча, мы учимся сами», и надѣемся, что предлагаемыя книги наилучше каждаго въ этомъ убѣдятъ. Сближеніе математики съ жизнью, введеніе ея въ повседневной обиходъ, умѣнье все окружающее насъ по возможности переводить на счетъ, мѣру и число—вотъ что главнымъ образомъ имѣютъ въ виду эти книги. А такъ какъ въ нихъ есть и такія задачи, усвоеніе и разборъ которыхъ не требуетъ почти никакой математической подготовки, то ихъ можно смѣло дать для самостоятельнаго чтенія и изученія даже учащимся, начиная съ 10—12 лѣтъ, и т. д. Возрастъ не ограниченъ, такъ какъ каждый найдетъ въ нихъ кое-что и для себя.

1908.





II.

Счетъ, Мѣра и Число.

(историческія справки).

Вотъ я бросаю на столъ палочку, или спичку, или камешекъ, или кубикъ, — словомъ какой-нибудь предметъ, и спрашиваю васъ: *сколько* предметовъ я бросилъ на столъ? Вы смотрите и отвѣчаете:

— *Одинъ* предметъ.

Я беру затѣмъ и бросаю передъ вами цѣлую горсть камешковъ, или спичекъ, или иныхъ какихъ предметовъ и опять спрашиваю: *сколько* здѣсь предметовъ?

Вы отвѣчаете: «*много!*» Но меня этотъ отвѣтъ не удовлетворяетъ. Я хочу знать *точно*, сколько именно предметовъ лежитъ предо мной. Для этого надо предметы *сосчитать*.

Въ чемъ состоитъ счетъ, вы тоже знаете. Вы берете одинъ предметъ и говорите *одинъ*; прикладываете къ нему еще одинъ и говорите: *два*; къ этимъ прикладываете еще одинъ и говорите: *три*; къ этимъ прикладываете еще одинъ и говорите: *четыре*, затѣмъ *пять, шесть, семь, восемь, девять* и такимъ образомъ добираетесь до *десяти* (*десятка*).

Вы считаете предметы *по одному*, или, иначе говоря, *единицами*. Но вы знаете также, что можно считать тѣ же предметы парами (по два), тройками (по три), четверками (по четыре) и т. д. Наконецъ, если предметовъ много, то можно считать ихъ и *десятками*, совсѣмъ такъ же, какъ вы считали единицами, т. е.: одинъ десятокъ, два десятка (или двадцать), три десятка (или тридцать) и т. д. Когда у васъ набирается *десять десятковъ*, вы называете это *сотней (сто)*, и считаете опять сотни, какъ единицы: сто, два ста (или двѣсти), триста, четыреста и т. д. Такъ считаете вы, пока не получите *десять сотенъ*, или *тысячу*, а затѣмъ эти тысячи считаете опять, какъ простыя единицы: одна тысяча, двѣ тысячи и т. д.

Все это вы знаете, и все это кажется такъ просто.

Итакъ, чтобы отвѣтить на вопросъ, *сколько* предметовъ, надо эти предметы *сосчитать*. Счетъ же состоитъ въ послѣдовательномъ прибавленіи къ единицѣ еще единицы, да еще единицы, да еще единицы и т. д. до конца, а затѣмъ остается *сказать* словами, что́ вы получили, или—иначе—*назвать результатъ счета*. Этотъ результатъ, или отвѣтъ на вопросъ: *сколько предметовъ?*—и будетъ не что иное, какъ *число*.

При первыхъ же шагахъ нашей болѣе или менѣе сознательной жизни мы учимся считать предметы и мало-по-малу вырабатываемъ въ своемъ умѣ *представленіе* о числѣ, какъ совокупности единицъ, независимо отъ самихъ предметовъ, вырабатываемъ себѣ понятіе о такъ называемомъ *отвлеченномъ числѣ*. Первое и основное математическое наше дѣйствіе состоитъ, слѣдовательно, въ *прикладываніи* къ единицѣ еще единицы да еще единицы, да еще и т. д. — въ *послѣдовательномъ* сложеніи, въ счетѣ.

Само по себѣ, какъ видимъ, это дѣйствіе не трудное. Вся трудность заключается не въ томъ, чтобы прикладывать единицу за единицей, а чтобы полученныя отъ такого прикладыванія числа *назвать*, или *написать* и запомнить. Вся трудность въ томъ, чтобы найти такой *способъ*, или *систему* счета, при которой немногими отдѣльными словами можно было бы называть, или немногими отдѣльными знаками можно было бы записывать какія угодно числа.

Человѣчество счастливо и удачно разрѣшило этотъ вопросъ. Выработана такая система устнаго и письменнаго счисленія, которая быстро дѣлается понятной каждому ребенку и усваивается имъ постепенно съ самыхъ раннихъ поръ. Выучиться считать и писать числа по нашей такъ называемой *десятичной системѣ счисленія*, въ основаніи которой лежитъ число десять, не стоитъ почти никакого особаго труда. Вы знаете это изъ личнаго опыта, изъ того, чему научились дома и въ школѣ. Но знаете ли вы также, что тысячи и тысячи лѣтъ прошли раньше, чѣмъ люди додумались и дошли до того, чему мы теперь можемъ такъ быстро и легко обучиться уже въ дѣтскомъ возрастѣ? Исторія того, какъ люди научились считать и писать числа, очень любопытная исторія, и съ ней каждому слѣдуетъ хотя немного ознакомиться.

Въ глубокой древности, на самой ранней зарѣ своей жизни, люди считали только съ помощью камешковъ или же дѣлали царапины и зарубки на деревѣ или камнѣ. Сколько было сосчитано предметовъ, столько дѣлалось и зарубокъ. Такія зарубки, относящіяся къ наиболѣе отдаленнымъ вѣкамъ жизни человѣка и имѣющія несомнѣнно значеніе числовыхъ замѣтокъ, находятъ и теперь въ различныхъ мѣстностяхъ. Какъ видимъ, это— самый простой способъ счета, заключающій въ себѣ понятіе объ образованіи числа прибавленіемъ послѣдовательно единицы за единицей. Припомнимъ также, что не такъ еще давно на Руси были распространены, а кое-гдѣ остались въ употребленіи и теперь, «бирки». Это не что иное, какъ деревянныя палочки, на которыхъ черточками и крестиками многіе неграмотные люди ведутъ свой незамысловатый счетъ.

Какъ считали наши отдаленнѣйшіе предки, можно приблизительно судить и на примѣрахъ существующихъ нынѣ народовъ, стоящихъ на очень низкой ступени развитія, находящихся, какъ говорятъ, въ *дикомъ* состояніи. Такъ, одинъ путешественникъ разсказываетъ, что дикари Андаманскихъ острововъ считаютъ очень просто, но очень забавно и странно. Чтобы изобразить счетъ *по одному*, они, просто-на-просто, трутъ носомъ о землю столько разъ, сколько надо. Если же имъ надо считать единицами болѣе высшаго порядка (скажемъ, какъ у насъ

десятками), то они столько разъ, сколько нужно, тянуть себя за уши. Какъ ни простъ и ни смѣшонъ этотъ способъ счета, онъ, однако, уже выше, чѣмъ тотъ, о которомъ мы упоминали раньше, и гдѣ просто складываются камешки, или проводятся черточки. Здѣсь мы видимъ уже счетъ единицами двухъ различныхъ порядковъ: простыми единицами — «носовыми», по способу этихъ дикарей, и единицами второго порядка или разряда—«ушными».

Древніе татары, когда дѣло шло о числахъ, сообщались между собой посредствомъ особыхъ палочекъ *Хе-му*, на которыхъ дѣлались условныя нарѣзки. По этимъ нарѣзкамъ каждая орда знала, въ какое время она должна выступить въ походъ, сколько лошадей и людей должно выставить каждое селеніе.

Обитатели древняго государства Америки, *Перу*, во времена своихъ царей — инковъ для изображенія и запоминанія чиселъ имѣли особые приборчики—*квиппосы.* Это были кольца, къ которымъ прикрѣплялись веревочки съ узелками и палочками разнаго цвѣта. Число узелковъ, ихъ завязываніе и развязываніе, а также чередованіе веревочекъ съ палочками позволяло выражать много чиселъ. Да не сохранился ли и у насъ до сихъ поръ обычай «завязывать узелокъ на память» и не имѣетъ ли онъ чего-то общаго съ этимъ квиппосомъ?

Но самымъ ближайшимъ и самымъ естественнымъ пособіемъ человѣку для счета были, конечно, его пальцы на рукахъ и ногахъ. И дѣйствительно, есть всѣ данныя предполагать, что этотъ пальцевой счетъ былъ самымъ распространеннымъ съ глубокой древности у всѣхъ почти сдѣлавшихся потомъ образованными народовъ. Каждый палецъ замѣнялъ при этомъ каждый исчисляемый предметъ. Такой способъ счета наблюдается у дикихъ народовъ и въ наше время, при чемъ слѣдуетъ замѣтить, что поднятіе пальцевъ вмѣсто того, чтобы назвать *число*, есть едва ли не единственный примѣръ, когда *отвлеченное* понятіе выражается *жестомъ.*

Но человѣческій умъ ищетъ своего выраженія въ словѣ. Извѣстное количество, извѣстное число предметовъ онъ выражаетъ *однимъ* словомъ. Такія слова иногда прямо указываютъ

на пріемы счета. Такъ, и теперь еще у нѣкоторыхъ народовъ число *два* обозначается словомъ «крылья», число *три*—словомъ «клеверъ» (трилистникъ), число *пять*—словомъ «рука». У индѣйцевъ въ Америкѣ числа 11, 12 и т. д. считаются такъ: «ноги одинъ», «ноги два»... (т. е. десять пальцевъ на ногахъ да еще одинъ, десять пальцевъ на ногахъ да еще два, и т. д.), а число 20 обозначается словами «весь человѣкъ». Въ Африкѣ для обозначенія большихъ чиселъ у иныхъ народовъ употребляются такія слова, какъ «куча», «гора» и т. д. Наконецъ, не припомните ли по этому поводу, что въ иныхъ мѣстахъ нашей крестьянской Россіи, когда хотятъ выразить «много», говорятъ «гора» или «уйма»: эку «гору», эку «уйму» вывалилъ, заграбасталъ, забралъ и т. п., а въ иныхъ мѣстахъ до сихъ поръ еще ведется счетъ на «копы»? При чемъ «копа» яицъ, напримѣръ, значитъ 60 штукъ ихъ.

Подобное образованіе названій чиселъ иногда отражается даже на изображеніи ихъ посредствомъ письменныхъ знаковъ. Обратили ли вы вниманіе на начертаніе римской цифры пять? Какъ извѣстно, она пишется такъ: V и представляетъ собою не что иное, какъ изображеніе *руки* человѣка. Двѣ такихъ руки, сложенныхъ вмѣстѣ (одна вверху, другая—внизу), даютъ вамъ римское изображеніе числа десять: X.

Теперь является вопросъ, не имѣютъ ли какихъ-либо соотвѣтствующихъ, взятыхъ изъ природы, значеній наши названія чиселъ (одинъ, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять), положенныя въ основу нашей устной системы счисленія?

Трудно, даже невозможно отвѣтить на этотъ вопросъ. Можно сказать только одно, что когда развился человѣческій языкъ, то и первыя числовыя понятія вылились въ извѣстныя числовыя слова. Если же эти слова и имѣли какое-либо значеніе, взятое изъ названій окружающихъ человѣка предметовъ, то это значеніе давно забыто и утеряно, такъ какъ образованіе числовыхъ понятій и выражающихъ ихъ словъ у современныхъ образованныхъ народовъ относится къ глубочайшей древности. Чтобы судить, какъ давно это было, достаточно замѣтить, что названія числительныхъ именъ совпадаютъ въ языкахъ: санскрит-

скомъ, зендскомъ, персидскомъ, греческомъ, латинскомъ, кельтскомъ, германскомъ и славянскомъ. Что же это значитъ? А это значитъ, что названія главныхъ чиселъ образовались еще тогда, когда всѣ эти народы составляли одну семью и говорили однимъ общимъ (арійскимъ) языкомъ. Это же было много и много тысячъ лѣтъ тому назадъ, въ *доисторическія* времена, потому что за двѣ-три тысячи лѣтъ, о которыхъ сохранились болѣе или менѣе достовѣрныя *историческія* свидѣтельства, всѣ перечисленные выше народы уже жили и развивались, живутъ и развиваются отдѣльно.

Итакъ, если когда-либо, въ глубинѣ вѣковъ, названія чиселъ и имѣли какое-либо еще иное значеніе, то оно съ теченіемъ времени утратилось, а остались только слова, дающія *отвлеченное представленіе* о числахъ. А какъ только человѣкъ научился отвлеченному счету, т. е. *просто* счету, независимо отъ тѣхъ или другихъ предметовъ, то это было и первое истинно *математическое* дѣйствіе человѣческаго сознанія.

Прибавлять по единицѣ, да еще по единицѣ, очевидно, можно сколько угодно. Значитъ и чиселъ есть сколько угодно,—ихъ, какъ говорятъ, *безконечно много*. И какъ только человѣкъ дошелъ до понятія о числѣ, то явилась тотчасъ задача, какъ уже упомянуто выше, самаго легкаго и простого названія и написанія любого, сколь угодно большого, числа. Немногими словами нужно было умѣть называть любыя числа и немногими знаками ихъ писать.

Мы знаемъ уже, какъ просто и легко это дѣлается теперь въ нашей *десятичной системѣ* счисленія. Однако, чтобы дойти до этой легкости и простоты, опять понадобился длинный рядъ вѣковъ и тысячелѣтій. Медленно и съ большими обходами достигало человѣчество цѣли. И введеніе въ человѣческій обиходъ нынѣ принятаго устнаго и письменнаго счисленія можно считать происшедшимъ уже въ несомнѣнно историческія времена. Такъ, *устное* десятичное счисленіе было извѣстно древнимъ грекамъ. Но, спрашивается, почему же наиболѣе привилось и распространилось десятичное счисленіе? Почему мы имѣемъ девять *простыхъ* единицъ, а десять ихъ принимаемъ за новую высшую единицу—*десятокъ* и считаемъ затѣмъ десятки, какъ

простыя единицы; десять десятковъ принимаемъ за еще высшую единицу—*сотню*, и считаемъ сотни, какъ единицы, десять сотенъ опять принимаемъ за еще высшую единицу — *тысячу*, и считаемъ тысячи, какъ простыя единицы и т. д.?

Почему въ *основаніе* нашего счета положено число *десять*? Вѣдь можно, какъ знаемъ, считать парами, тройками, четверками, пятками и т. д. Какъ вы знаете, существуетъ счетъ «дюжинами», т. е. такой счетъ, при которомъ въ основаніи лежитъ число 12. Что не всегда и всюду число 10 признавалось за основу счета, на этотъ счетъ существуетъ много доказательствъ. Помимо счета «дюжинами», припомните хотя бы русскій счетъ «сорокъ сороковъ» или «копами». У другихъ народовъ есть несомнѣнные остатки такого счета, при которомъ въ основѣ лежитъ число 20. Однако, всѣ эти системы счета вымерли и вымираютъ, а торжествуетъ десятичная. Объясняется это прежде всего и единственно устройствомъ нашихъ рукъ, имѣющихъ въ общей сложности 10 пальцевъ, которые были первыми и главными помощниками человѣка въ выработкѣ имъ понятія о числѣ и въ развитіи устнаго счета.

Что касается письменнаго счета, т. е. умѣнья изобразить любое число съ помощью немногихъ знаковъ, то онъ усовершенствовался только сравнительно недавно, именно послѣ введенія такъ называемыхъ *арабскихъ* цифръ и прибавленія къ 9 *значащимъ* цифрамъ еще незначащей—*нуля*. Этотъ послѣдній у арабовъ назывался цифиръ (зефиръ), откуда и получилось самое слово «цифра». Самую же систему письменнаго счисленія арабы, по всей вѣроятности, позаимствовали у индусовъ или китайцевъ.

Нѣкоторыя бо̀льшія подробности относительно счисленія читатель, если заинтересуется вопросомъ, найдетъ еще въ 3-й книгѣ «Въ царствѣ смекалки».

Такъ медленно и на протяженіи многихъ вѣковъ распространялся и утверждался въ понятіи человѣчества тотъ устный и письменный счетъ, которому намъ столь нетрудно научиться нынѣ въ самое непродолжительное время и въ самомъ раннемъ возрастѣ. Неправда ли, что вы не помните даже, когда научились считать,—до десяти, напримѣръ? Какъ начали учиться

говорить, такъ, само-собой, начали учиться и считать! Начали вмѣстѣ съ тѣмъ пріобрѣтать и понятіе о числѣ. А научившись считать до десяти, не трудно пойти и далѣе. Вѣдь десятки считаются, какъ простыя единицы, и, чтобы добраться до сотни, достаточно всего 11 различныхъ словъ. Затѣмъ сотни опять считаютъ какъ единицы... Такъ счетомъ вы получаете все новыя и новыя числа.

Но не только отъ одного *счета* получаются числа. Они получаются еще путемъ *сравненія* величины предметовъ. Глядя на окружающій васъ міръ, вы скоро замѣчаете, что одни предметы въ немъ *больше*, другіе *меньше*. Это понятіе о величинѣ предметовъ, о *большемъ* и *меньшемъ*, вы выражаете разными словами: выше, ниже, длиннѣе, короче, шире, уже, толще, тоньше, легче, тяжеле и т. д. Подобныя слова не даютъ, однако, настоящаго, точнаго понятія о *величинѣ* предмета. Чтобы имѣть точное понятіе объ этой *величинѣ*, необходимо *сравнить* предметъ съ другимъ подобнымъ ему предметомъ, величину котораго вы хорошо знаете. Чтобы знать *точно* неизвѣстную вамъ длину, надо сравнить ее съ другой длиной, которую вы точно знаете; чтобы узнать величину неизвѣстной вамъ площади, надо сравнить ее съ извѣстною вамъ площадью. Чтобы узнать вѣсъ тѣла, надо сравнить его съ извѣстной вамъ тяжестью и т. д.

Какъ узнать точную длину стола, за которымъ вы сидите? Что вы дѣлаете для того, чтобы это узнать? Не что другое, какъ *сравниваете* эту длину съ извѣстной вамъ длиной, напр., аршина. Вы берете аршинъ и укладываете его вдоль стола. Вотъ аршинъ помѣстился разъ да еще одинъ разъ, да еще половина аршина. Вы и говорите: «столъ имѣетъ въ длину 2 съ половиною аршина». Вы сравнили длину стола съ длиною аршина, иначе говоря, вы *измѣрили* аршиномъ длину стола. Аршинъ у васъ есть *единица мѣры длины*, — такая единица мѣры, о которой вы *должны имѣть точное представленіе* и съ которой вы сравниваете всѣ остальныя длины. Если вамъ надо измѣрить большія разстоянія, то вмѣсто аршина удобнѣе взять бо́льшую длину — сажень, версту, милю, но о всякой такой длинѣ *вы должны имѣть точное понятіе*. Только въ такомъ случаѣ вы сможете точно измѣрить и получить *настоящее представленіе*

и о другой неизвѣстной еще вамъ длинѣ и выразить эту длину *числомъ* въ единицахъ извѣстной вамъ *мѣры*.

Что значитъ, когда вы говорите, что «этотъ мѣшокъ съ хлѣбомъ *вѣситъ* 5 пудовъ»? Какъ вы это узнали? Конечно, такъ, что *взвѣсили* на вѣсахъ этотъ мѣшокъ. Въ чемъ заключается *взвѣшиваніе*, или измѣреніе вѣса? Да опять-таки въ томъ, что вѣсъ этого мѣшка съ хлѣбомъ вы *сравнили* съ *извѣстнымъ вамъ* вѣсомъ куска чугуна, или желѣза, — такого куска, который вѣситъ именно *пудъ*. Итакъ, что̀ такое значитъ измѣрить? Это значитъ, другими словами, *сравнить* одинъ предметъ съ другимъ однороднымъ ему, но извѣстнымъ вамъ предметомъ. Этотъ извѣстный вамъ предметъ, съ которымъ вы сравниваете другіе предметы, называется *мѣрой*. Какъ вы уже знаете, есть много различныхъ мѣръ: пространства, времени, вѣса, скорости, силы и т. д.

Что̀ получается въ результатѣ каждаго измѣренія? *Число!* Что̀ говоритъ вамъ это число? Оно даетъ вамъ точное понятіе о величинѣ того или другого предмета! Гдѣ находятся всѣ окружающіе васъ предметы? Въ пространствѣ! Слѣдовательно, съ развитіемъ понятія о числѣ, какое другое развивается у васъ понятіе? Понятіе о пространствѣ, объ окружающемъ васъ мірѣ!

Ясно ли вамъ теперь, что въ основаніе сознательной жизни человѣка лежитъ счетъ и мѣра? Ясно ли вамъ, что если вы хотите правильно судить объ окружающемъ васъ *пространствѣ*, если хотите знать, что̀ такое *время*, то прежде всего вы должны усвоить счетъ и мѣру, а слѣдовательно, научиться свободно обращаться съ *числомъ*? Ясно ли вамъ теперь, что истинное развитіе знанія и сознательности можетъ идти только рядомъ съ развитіемъ счета, мѣры, порядка и числа?

Вотъ почему не пренебрегайте ни малѣйшимъ случаемъ, чтобы упражняться въ счетѣ, въ мѣрѣ, порядкѣ и числѣ. Не отдѣляйте *ариѳметику*, или *математику*, вообще, отъ жизни. Нельзя этого дѣлать, потому что человѣчество только тогда вступило (а это произошло только въ самое послѣднее время) на путь истиннаго знанія, когда во всѣ свои разсужденія ввело понятіе о счетѣ, мѣрѣ и порядкѣ, т. е. понятіе о *числѣ*. Если вы хотите что-либо знать, то прежде всего вы должны ваши

умъ воспитывать и упражнять въ области *математическихъ* познаній, т. е. такихъ, гдѣ прежде всего входятъ понятія о количествѣ, величинѣ и порядкѣ, выражаемыхъ тѣмъ или другимъ числомъ или сочетаніемъ чиселъ.

Трудно ли это? Нѣтъ. Стоитъ лишь только каждому изъ насъ постоянно помнить и знать, что все въ окружающемъ насъ мірѣ основано на счетѣ, числѣ и порядкѣ. Человѣкъ считалъ, вычислялъ, строилъ и мѣрилъ всегда, когда ему нужно было сдѣлать что-либо долговѣчное, даже въ то время, когда, считая, вычисляя и строя «по пальцамъ», онъ не сознавалъ и не сознаетъ, что работаетъ въ области *математики*.

Теперь, съ развитіемъ грамотности и письма, наступаетъ время, когда счетъ, мѣра и порядокъ должны проникать каждый шагъ нашей жизни.

Учитесь считать, мѣрить и вносить порядокъ въ свою жизнь, начиная съ первыхъ же шаговъ. Все остальное дастся легко. А учиться счету, порядку и мѣрѣ очень легко, какъ въ игрѣ и забавѣ, такъ и въ дѣлѣ. Стоитъ только этого захотѣть и къ этому постоянно направлять свой умъ, разбираясь во всякомъ окружающемъ насъ явленіи.

— —

III.

Роль памяти въ математикѣ.

Относительно математики въ нашемъ обществѣ еще до сихъ поръ существуютъ самые странные предразсудки. Одни говорятъ, что заниматься математикой могутъ только исключительные, одаренные совсѣмъ особыми способностями умы, другіе утверждаютъ, что для этого необходима особая, такъ сказать, «математическая память» для запоминанія формулъ и т. д. Всѣ подобные толки являются обыкновенно плодомъ недоразумѣнія, зависящаго въ значительной степени отъ того низкаго уровня, на которомъ находится у насъ состояніе самыхъ элементарныхъ математическихъ знаній и навыковъ.

Нельзя, конечно, спорить противъ того, что существуютъ умы съ рѣзко выраженными склонностями къ той или иной

сторонѣ умственной дѣятельности. Но точно также никоимъ образомъ нельзя утверждать, что существуютъ хотя мало-мальски нормальные умы, которые совсѣмъ неспособны къ воспріятію и полному усвоенію необходимыхъ математическихъ знаній, хотя бы, скажемъ, въ размѣрахъ такъ называемаго «средняго курса». Говорить противное значитъ доказывать, что для различныхъ человѣческихъ наукъ существуютъ и различныя логики, съ чѣмъ, конечно, врядъ ли кто согласится.

Будемъ справедливы и признаемъ наконецъ, что выраженіе «неспособенъ къ математикѣ» есть прежде всего горькій продуктъ нашего неумѣнія, а, пожалуй, иногда и легкомысленнаго нежеланія поставить въ семьѣ и школѣ преподаваніе математики на должную высоту.

Еще менѣе можно говорить о необходимости для математики какой-то особой, спеціальной памяти для запоминанія (зазубриванія?) какихъ-то формулъ или правилъ, науку сознательной и послѣдовательной логической мысли обращать въ какой-то механическій безсознательный процессъ. А, между тѣмъ, какъ далеко можетъ заходить дѣло въ этомъ отношеніи, существуютъ свидѣтельства такихъ авторитетовъ, какъ нашъ талантливѣйшій математикъ и профессоръ В. П. Ермаковъ. Вотъ что̀, между прочимъ, сообщалъ уважаемый профессоръ въ одномъ изъ своихъ докладовъ Кіевскому физико-математическому обществу:

«Когда мнѣ пришлось студентамъ читать интегральное исчисленіе, то въ первый же годъ произошелъ эпизодъ, который всегда сохранится въ моей памяти.

«Прочитавши часть теоріи, я для поясненія даю задачи. Я прошу студентовъ рѣшать задачи на скамьяхъ въ тетрадяхъ. По мѣрѣ рѣшенія, я пишу полученные результаты на доскѣ. Однажды для поясненія способовъ пониженія биноміальныхъ интеграловъ я написалъ на доскѣ подходящую задачу. И вотъ вижу, что нѣкоторые студенты вынимаютъ изъ кармановъ какія-то тетрадки и смотрятъ въ нихъ.

«— Что это?

«— Общія формулы.

«— Зачѣмъ?

«— Намъ прежній профессоръ совѣтовалъ имѣть списокъ общихъ формулъ и по нему рѣшать частные примѣры. Вѣдь не станете же вы требовать, чтобы мы заучили на память всѣ сорокъ общихъ формулъ.

«— Заучивать въ математикѣ никакихъ формулъ не слѣдуетъ. Но я нахожу также неумѣстнымъ пользованіе справочными пособіями и нахожденіе интеграловъ по общимъ формуламъ, подстановкою въ нихъ данныхъ значеній показателей и коэффиціентовъ. Вѣдь не съ неба свалились къ вамъ общія формулы; для вывода ихъ вы употребили рядъ разсужденій; примѣняйте тѣ же разсужденія къ частнымъ примѣрамъ.

«Такимъ образомъ оказалось возможнымъ находить всякіе интегралы и безъ общихъ формулъ. Пришлось, впрочемъ, нѣкоторыя выкладки видоизмѣнить такъ, чтобы онѣ непосредственно могли быть приложены къ частнымъ примѣрамъ.

«Получилась еще и та выгода, что на каждомъ частномъ примѣрѣ студенты повторяли всѣ тѣ разсужденія, которыя необходимы для вывода общей формулы. Отъ частаго повторенія пріобрѣтался навыкъ и въ результатѣ—быстрота рѣшенія задачъ.

«Разсказанный эпизодъ заставилъ меня глубже вникнуть въ сущность математики.

«Въ молодыхъ лѣтахъ и я обращалъ все вниманіе на конечные результаты. Разбирая какое-нибудь доказательство, я заботился только о томъ, чтобы убѣдиться въ его строгости. Вотъ добрался до окончательнаго результата, и довольно! Дальше я старался помнить окончательные выводы, весь же процессъ доказательства быстро испарялся. Но потомъ забывались и формулы, а часто эти формулы оказывались необходимыми при дальнѣйшихъ занятіяхъ. Что же оставалось дѣлать? Собирать библіотеку изъ справочныхъ книгъ? Но на это не хватало средствъ, да и не было помѣщенія для библіотеки. Поневолѣ приходилось припоминать самый процессъ, при помощи котораго выводилась та или иная формула. Такимъ образомъ вмѣсто формулъ мало-по-малу я пришелъ къ самимъ доказательствамъ. Оказалось, что легче припомнить процессъ математическаго

мышленія, чѣмъ голыя формулы. Да и нѣтъ надобности помнить цѣликомъ весь процессъ мышленія: достаточно намѣтить этапные пункты, по которымъ должна идти наша мысль. И вотъ уже нѣсколько лѣтъ, какъ я своимъ слушателямъ твержу: **въ математикѣ слѣдуетъ помнить не формулы, а процессы мышленія.** Прочитавши какой-нибудь отдѣлъ изъ аналитической геометріи, я излагаю студентамъ конспектъ, въ которомъ, безъ формулъ, намѣчаю главные пункты мышленія.

«Если выраженъ словами процессъ математическаго мышленія, то полученіе самихъ формулъ является уже дѣломъ чисто механическимъ. Въ механизмѣ же алгебраическихъ дѣйствій ученики должны пріобрѣсти навыки еще въ средней школѣ.

«Я пришелъ къ тому убѣжденію, что указанный мною принципъ долженъ быть примѣненъ и въ средней школѣ...»

Продолжимъ мысль В. П. Ермакова и скажемъ: указанный принципъ долженъ въ особенности лечь въ основаніе начальнаго—какъ семейнаго, такъ и школьнаго—образованія въ области математическихъ знаній. Не натаскивайте ни ребятъ, ни юношей на различныхъ «табличкахъ» сложенія, вычитанія, умноженія, на механическомъ запоминаніи разныхъ «правилъ» и формулъ, а прежде всего пріучайте охотно и сознательно *мыслить*. Остальное приложится. Не мучьте никого длиннѣйшими и скучнѣйшими механическими вычисленіями и упражненіями.

Когда они понадобятся кому-либо въ жизни, онъ ихъ продѣлаетъ самъ, — да на это нынче есть всякія счетныя машины, таблицы и иныя приспособленія.

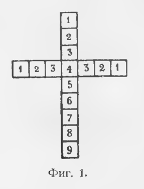




Задача 1-я.

Знатная дама и недобросовѣстный мастеръ.

Одна знатная дама имѣла крестъ, составленный изъ крупныхъ брильянтовъ. Сколько всего было этихъ брильянтовъ, она даже не знала, да и не интересовалась этимъ, потому что занимала ее другая особенность креста, а именно: съ какого бы изъ трехъ верхнихъ концовъ креста она ни считала брильянты, когда приходила къ основанію креста, всегда получала число девять (фиг. 1). Крестъ какъ-то понадобилось отдать въ починку.



Фиг. 1.

При этомъ дама сообщила мастеру о чудесной особенности своего креста.

— Видите ли!.. Съ какого бы конца я ни начинала счетъ, всегда получается девять!.. Такъ я всегда провѣряю, всѣ ли камни въ наличности!

— Только такъ?—спросилъ мастеръ.

— Ну да, только такъ: этого совершенно достаточно. Я и послѣ вашей починки провѣрю число камней такимъ же способомъ.

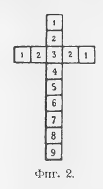
Мастеръ оказался недобросовѣстнымъ: онъ вынулъ и оставилъ у себя два брильянта, передѣлалъ затѣмъ крестъ, починилъ его и возратилъ дамѣ.

Та пересчитала камни по-своему и нашла, что всѣ камни налицо!

Спрашивается, что сдѣлалъ мастеръ, возвратившій дамѣ крестъ послѣ починки?

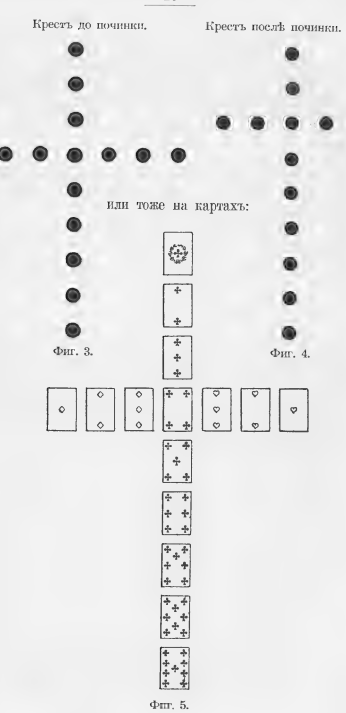
Рѣшеніе.

Не трудно видѣть, что мастеръ срѣзалъ концы поперечной перекладины вмѣстѣ съ брильянтами, по одному съ каждаго конца, и затѣмъ передвинулъ эту перекладину на одинъ рядъ выше. Такимъ образомъ изъ креста, изображеннаго на фиг. 1, получился крестъ, изображенный на фиг. 2.



Фиг. 2.

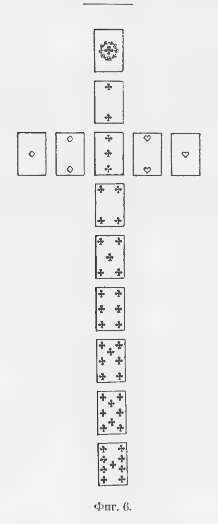
Дама, пересчитывая въ починенномъ крестѣ брильянты «по-своему», т. е. отъ каждой изъ трехъ верхнихъ оконечностей креста до основанія, опять насчитала по девяти камней и не замѣтила обмана.



Фиг. 3.

Фиг. 4.

Фиг. 5.



Фиг. 6.

Совершенно ясно, что провѣрить ошибку наивной дамы и показать недобросовѣстность ювелира можно, и не имѣя драгоцѣнныхъ камней. Для этого можете взять или 15 камешковъ, или 15 кубиковъ, или 15 картъ, или нарѣзать просто 15 кусочковъ бумаги. Вы получите фигуры 3, 4, 5 и 6.

Вмѣсто того, чтобы срѣзать и присвоить себѣ два камня, мастеръ могъ съ неменьшимъ успѣхомъ *прибавить* два камня отъ себя, и дама этого не замѣтила бы при своемъ способѣ провѣрки. Въ такомъ случаѣ ему пришлось бы поперечникъ

креста, увеличенный двумя камнями, опустить на одинъ рядъ внизъ.

Мастеръ-ювелиръ поступилъ нехорошо, но слишкомъ наивной оказалась и дама, не сумѣвшая сдѣлать такой простой провѣрки. Ясно, что одного умѣнья считать до девяти еще слишкомъ недостаточно для того, чтобы не попасться впросакъ на самомъ простомъ подсчетѣ.

Задача 2-я.
Удивительный отгадчикъ.

Десять картъ (или домино) отъ туза до десятки положены въ рядъ, начиная справа налѣво крапомъ вверхъ (т. е. внизъ «лицомъ») и положены въ послѣдовательномъ возрастающемъ порядкѣ, т. е. тузъ, двойка, тройка и т. д. до десятки. «Отгадчикъ» объявляетъ остальнымъ, что онъ уйдетъ въ другую комнату или отвернется, а они безъ него могутъ перемѣстить справа налѣво сколько угодно картъ, при чемъ единственнымъ условіемъ ставится то, чтобы не измѣнялось относительное расположеніе какъ перемѣщенныхъ, такъ и остальныхъ картъ. По возвращеніи отгадчикъ берется узнать не только число перемѣщенныхъ картъ, но и открыть ту карту, которая укажетъ (числомъ очковъ), сколько перемѣщено картъ.

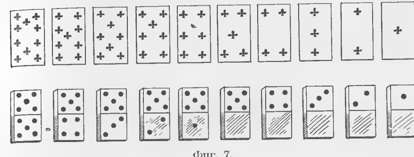
Рѣшеніе.

И дѣйствительно, оказывается, что требуемую карту всегда можно открыть. Но для этого не нужно даже «догадки», а достаточно самаго простого, не выходящаго изъ предѣла перваго десятка, ариѳметическаго расчета.

Разъяснимъ подробно задачу. Для этого перевернемъ всѣ карты или домино лицомъ вверхъ. Справа налѣво они первоначально лежатъ въ такомъ порядкѣ, какъ указано на фиг. 7-ой.

Воображаемый «магъ и чародѣй» оставляетъ комнату, а кто желаетъ убѣдиться «въ чудесныхъ» его способностяхъ,—пере-

мѣщаетъ нѣсколько картъ справа налѣво, не измѣняя ихъ относительнаго расположенія, а затѣмъ двигаетъ **всѣ** карты въ этомъ новомъ порядкѣ такъ, чтобы весь рядъ картъ занималъ



Фиг. 7.

прежнее мѣсто. Пусть, напр., перемѣщено вначалѣ 4 карты. Тогда новый порядокъ ихъ будетъ представленъ фиг. 8.

Очевидно, что первая карта (или домино) слѣва, четверка,— и показываетъ число перемѣщенныхъ картъ. Поэтому явившійся въ комнату «угадчикъ» открываетъ первую карту **слѣва**, кладетъ ее на столъ и говоритъ: «Перемѣщено четыре карты» (или «домино»). Здѣсь могутъ быть для большаго интереса пущены въ ходъ маленькія невинныя хитрости. Хотя дѣло въ томъ, чтобы посмотрѣть эту первую карту или (домино) слѣва, но «угадчикъ» можетъ сдѣлать видъ и внушить собесѣдникамъ,

Фиг. 8.

что онъ знаетъ число перемѣщенныхъ картъ раньше, чѣмъ открываетъ карту, и что открываніе четверки есть только добавочное доказательство его всезнанія.

Дальше дѣло пойдетъ еще удивительнѣе и занимательнѣе. Карты остаются въ томъ же порядкѣ, и угадывающій уходитъ зная, что послѣдняя карта слѣва есть четверка. Сколько бы картъ въ его отсутствіе ни перемѣстили (опять справа налѣво и не измѣняя порядка), если онъ придетъ и откроетъ 5-ю карту ($4+1=5$), считая слѣво направо, то число очковъ этой карты покажетъ ему всегда число перемѣщенныхъ картъ. Такъ, пусть перемѣщено во второй его выходъ справа налѣво три карты. Тогда получится такой порядокъ картъ (фиг. 9):

Фиг. 9.

и пятая карта, считая слѣва, дѣйствительно показываетъ три очка. Открывъ эту тройку и положивъ ее опять на мѣсто, не трудно уже, не глядя, сообразить, что послѣдняя карта слѣва теперь будетъ семерка. Запомнивъ это, угадывающій опять уходитъ въ другую комнату, предлагая перемѣстить сколько угодно картъ справа налѣво, напередъ зная, что по приходѣ онъ откроетъ 8 карту ($7+1$), и число очковъ этой карты ему покажетъ, сколько картъ было перемѣщено въ его отсутствіе.

Вообще, если вы знаете число очковъ послѣдней слѣва карты (или домино), а это, какъ видимъ, нетрудно, то къ этому числу надо придать единицу, и вы получите то мѣсто, считая по порядку слѣва, на которомъ лежитъ карта, указывающая, сколько картъ перемѣщено. Задача эта, какъ видимъ, весьма проста, но и весьма эффектна. Разобраться въ рѣшеніи ея не составляетъ особаго труда, и каждый желающій можетъ это сдѣлать съ большой пользой для себя.

Задача 3-я.

Движеніемъ пальца.

Одинъ малышъ жаловался, что ему очень трудно запомнить таблицу умноженія первыхъ десяти чиселъ на *девять*. Отецъ его нашелъ очень легкій способъ помочь памяти съ помощью пальцевъ рукъ. Вотъ этотъ способъ въ пользу и помощь другимъ:

Положите объ руки рядомъ на столъ и протяните пальцы. Пусть каждый палецъ по порядку означаетъ соотвѣтствующее число: первый слѣва 1, второй за нимъ 2, третій 3, четвертый 4 и т. д. до десятаго, который означаетъ 10. Требуется теперь умножить любое изъ первыхъ 10-ти чиселъ на девять. Для этого вамъ стоитъ только, не сдвигая рукъ со стола, приподнять вверхъ тотъ палецъ, который обозначаетъ множимое. Тогда остальные пальцы, лежащіе налѣво отъ поднятаго пальца, дадутъ въ суммѣ число десятковъ, а пальцы направо—число единицъ.

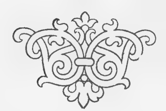
Умножить 7 на 9. Кладете объ руки на столъ и подымаете седьмой палецъ, налѣво отъ поднятаго пальца лежатъ 6 пальцевъ, а направо 3. Значитъ, результатъ умноженія 7 на 9 равенъ 63.

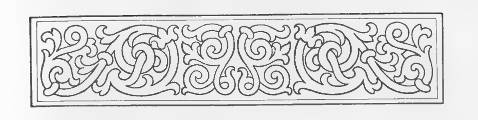
Рѣшеніе.

Это удивительное на первый взглядъ механическое умноженіе тотчасъ же станетъ понятнымъ, если разсмотрѣть слолбецъ таблицы умноженія на 9 первыхъ десяти послѣдовательныхъ чиселъ:

$$1 \times 9 = 09$$
$$2 \times 9 = 18$$
$$3 \times 9 = 27$$
$$4 \times 9 = 36$$
$$5 \times 9 = 45$$
$$6 \times 9 = 54$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$8 \times 9 = 72$$
$$9 \times 9 = 81$$
$$10 \times 9 = 90$$

Здѣсь цифры десятковъ въ произведеніяхъ йдутъ, послѣдовательно увеличиваясь на единицу: 0, 1, 2, 3, 4,...., 8, 9, а цифры единицъ идутъ, наоборотъ, уменьшаясь на единицу: 9, 8, 7,.. .. 1, 0. Сумма же цифръ единицъ и десятковъ всюду равна 9. Простымъ поднятіемъ соотвѣтствующаго пальца мы отмѣчаемъ это и... умножаемъ. Человѣческая рука есть одна изъ первыхъ счетныхъ машинъ!





Задачи-шутки и задачи-загадки.

Задача 4-я.

Звѣриное число.

Число 666 (звѣриное) увеличить въ полтора раза, не производя надъ нимъ никакихъ ариѳметическихъ дѣйствій.

Рѣшеніе.

Написать это число, а затѣмъ повернуть бумажку «вверхъ ногами» (на 180°). Получится 999. (Очевидно, вмѣсто взятаго большого числа можно начать съ 6).

Замѣчаніе. Подробности о «звѣриномъ числѣ» читатель найдетъ въ 3-ей (послѣдней) книгѣ «Въ царствѣ смекалки».

Задача 5-я.

Дѣлежъ.

Раздѣлимъ 5 яблокъ между 5-ю лицами такъ, чтобы каждый получилъ по яблоку, и одно яблоко осталось въ корзинѣ.

Рѣшеніе.

Одно лицо беретъ яблоко вмѣстѣ съ корзиной. (Въ данномъ случаѣ мы имѣемъ, очевидно, дѣло съ родомъ задачи-загадки).

Задача 6-я.

Сколько кошекъ?

Въ комнатѣ четыре угла. Въ каждомъ углу сидитъ кошка. Насупротивъ каждой кошки по 3 кошки. На хвостѣ каждой кошки по одной кошкѣ. Сколько же всего кошекъ въ комнатѣ?

Рѣшеніе.

Иной, пожалуй, начнетъ вычислять такъ: 4 кошки въ углахъ, по три кошки противъ каждой, еще 12 кошекъ, да на хвостѣ каждой кошки по кошкѣ, значитъ, еще 16 кошекъ. Всего, значитъ, 32 кошки. Пожалуй, по-своему онъ будетъ и правъ... Но еще болѣе правъ будетъ тотъ, кто сразу сообразитъ, что въ комнатѣ находятся всего-на-всего четыре кошки. Ни болѣе ни менѣе.

Задача 7-я.

Задача цифръ.

Написано:

1	1	1
3	3	3
5	5	5
7	7	7
9	9	9

Изъ этихъ 15-ти цифръ зачеркните 12 цифръ такъ, чтобы при сложеніи остальныхъ 3-хъ незачеркнутыхъ получилось 20?

Рѣшеніе.

Разсматривая написанныя числа, какъ 5 трехзначныхъ слагаемыхъ, для полученія требуемаго вычеркиваемъ цифры, какъ указано ниже. Сложеніе остальныхъ и даетъ 20.

	~~1~~	1	1			~~1~~	1	~~1~~
	~~3~~	~~3~~	~~3~~			~~3~~	~~3~~	3
+	~~5~~	~~5~~	~~5~~	или	+	~~5~~	~~5~~	~~5~~
	~~7~~	~~7~~	~~7~~			~~7~~	~~7~~	7
	~~9~~	~~9~~	9			~~9~~	~~9~~	~~9~~
		2	0				2	0

Задачу можно видоизмѣнять всячески.

Задача 8-я.

Къ числу 851 припишите одну, двѣ, три или болѣе цифръ, въ средину или по краямъ его—все равно, но такъ, чтобы получившееся число было меньше 851.

Рѣшеніе.

Это опять-таки родъ шутливой загадки, разгадка которой очень проста. Цифры, какія вамъ угодно, приписывайте такъ, чтобы получить *дробь*, или простую или десятичную,—все равно. Видоизмѣнять и рѣшать эту задачу можно всячески.

Задача 9-я.

Уродъ.

Одинъ господинъ написалъ о себѣ слѣдующее: «Всѣхъ пальцевъ у меня двадцать пять на одной рукѣ, столько же на другой рукѣ, да на обѣихъ ногахъ десять». Отчего онъ оказался такимъ уродомъ?

Рѣшеніе.

Господинъ просто былъ или малограмотный, или очень ужъ разсѣянный человѣкъ: *въ одномъ мѣстѣ онъ не поставилъ знака препинанія* (двухъ точекъ). Ему нужно было бы написать такъ: «Всѣхъ пальцевъ у меня двадцать: пять на одной рукѣ, столько же на другой рукѣ, да на обѣихъ ногахъ десять». И не было бы никакого недоразумѣнія и вопроса объ уродствѣ.

Задача 10-я.

Что сказалъ старикъ?

Два молодыхъ казака, оба лихіе наѣздники, часто бились между собою объ закладъ, кто кого перегонитъ. Не разъ то тотъ, то другой былъ побѣдителемъ,— наконецъ, это имъ надоѣло.

— Вотъ что,—сказалъ Грицко,—давай спорить наоборотъ. Пусть закладъ достанется тому, чей конь придетъ въ назначенное мѣсто вторымъ, а не первымъ.

— Ладно!—отвѣтилъ Опанасъ.

Казаки выѣхали на своихъ коняхъ въ степь. Зрителей собралось множество: всѣмъ хотѣлось посмотрѣть на такую диковинку. Одинъ старый казакъ началъ считать, хлопая въ ладоши:

— Разъ!.. Два!.. Три!..

Спорщики, конечно, ни съ мѣста. Зрители стали смѣяться, судить да рядить и порѣшили, что такой споръ невозможенъ, и что спорщики простоятъ на мѣстѣ, какъ говорится, до скончанія вѣка. Тутъ къ толпѣ подошелъ сѣдой старикъ, видавшій на своемъ вѣку разные виды.

— Въ чемъ дѣло?—спрашиваетъ онъ.

Ему сказали.

— Эге-жъ!—говоритъ старикъ,—вотъ я имъ сейчасъ шепну такое слово, что поскачутъ, какъ ошпаренные...

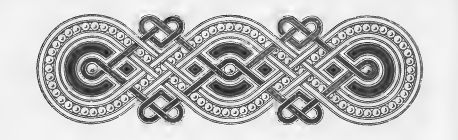
И дѣйствительно... Подошелъ старикъ къ казакамъ, сказалъ имъ что-то; и черезъ полминуты казаки уже неслисъ по степи во всю прыть, стараясь непремѣнно обогнать другъ друга, но закладъ все же выигрывалъ тотъ, чья лошадь приходила второй.

Что сказалъ старикъ?

Рѣшеніе.

Старикъ шепнулъ казакамъ: «Пересядьте». Тѣ поняли, мигомъ пересѣли каждый на лошадь своего противника, и каждый погналъ теперь во всю прыть чужую лошадь, на которой онъ сидѣлъ, чтобы собственная его лошадь пришла 2-й.





Спички и палочки.

Запаситесь коробкой спичекъ, или пучкомъ палочекъ одинаковой длины. Съ помощью ихъ вы всегда можете придумать рядъ забавныхъ и остроумныхъ задачъ, развивающихъ сообразительность и смышленность. Вотъ для примѣра нѣкоторыя простѣйшія изъ нихъ (Во 2-й книгѣ «Въ царствѣ смекалки» этому предмету посвящена болѣе обширная глава).

Задача 11-я.

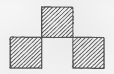
Изъ 15-ти палочекъ одинаковой длины (или спичекъ): 1) Построить пять равныхъ прилегающихъ другъ къ другу квадратиковъ; 2) снять три палочки такъ, чтобы осталось всего три равныхъ квадрата.

Рѣшеніе.

Нижеслѣдующія фигуры вполнѣ выясняютъ, какъ рѣшаются заданные вопросы:



Фиг. 10.



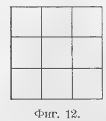
Фиг. 11.

Задача 12-я.

Изъ 24-хъ равныхъ палочекъ (или спичекъ): 1) составить фигуру изъ 9-ти *соприкасающихся* квадратовъ; 2) снять затѣмъ восемь спичекъ такъ, чтобы осталось только два квадрата.

Рѣшеніе.

Какъ рѣшается первая часть вопроса, ясно изъ приложеннаго чертежа:



Фиг. 12.

Какъ, отнявъ восемь спичекъ, получить 2 квадрата, видно изъ фиг. 13 и 14:



Фиг. 13. Фиг. 14.

Очень хорошая задача со спичками или палочками равной длины, дополняющая предыдущія, слѣдующая—

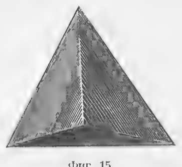
Задача 13-я.

Изъ шести спичекъ или равныхъ палочекъ составить четыре равныхъ равностороннихъ треугольника.

Можно смѣло поручиться, что мало кому сразу придетъ въ голову рѣшеніе этой простой съ виду задачи. Дѣло въ томъ, что въ данномъ случаѣ приходится строить изъ спичекъ не плоскую фигуру, а фигуру *въ пространствѣ*.

Рѣшеніе.

Задачу рѣшите, вглядѣвшись въ фиг. 15. На ней изображено геометрическое тѣло—правильная трехгранная *пирамида*, иначе — «тетраэдръ», ограниченный четырьмя равными между собою равносторонними треугольниками. Положите на столъ



Фиг. 15.

3 спички такъ, чтобы онѣ составили треугольникъ, затѣмъ поставьте остальныя три спички такъ, чтобы онѣ нижними своими концами упирались въ углы лежащаго на столѣ треугольника, а верхними концами соединялись вмѣстѣ надъ срединою его,— и вы выполните то, что требуется задачей.

Ниже предлагается еще нѣсколько особаго рода развлеченій съ палочками или спичками, принадлежащихъ уже скорѣе къ области задачъ-загадокъ или просто шутокъ.

Задача 14-я.

Положено пять спичекъ:



Прибавить къ нимъ еще пять спичекъ такъ, чтобы получилось три!

Рѣшеніе.

Спички прикладываются слѣдующимъ образомъ:



Образуется слово: *три.*

Приложить къ 4 спичкамъ 5 спичекъ такъ, чтобы получилось сто:

Четыре спички положены такъ:



Прибавляя къ нимъ еще пять, положенныхъ поперчно, образуемъ слово:



Знающимъ французскій языкъ, или обучающимся ему, можно предложить такую задачу:

Приложить **къ шести** спичкамъ **три** такъ, чтобы получилось **восемь**.

Шесть спичекъ положено такъ:



Какъ приложены три спички, ясно изъ нижеслѣдующей фигуры:

То есть получается французское слово HUIT (восемь).

Не хотите ли еще поупражняться въ нѣмецкомъ языкѣ? Тогда къ **шести** палочкамъ



прибавьте еще **семь** палочекъ такъ, чтобы получить **десять.**

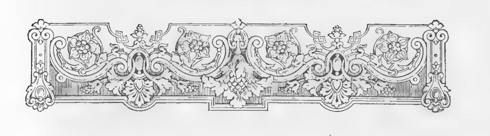
Приложите эти семь палочекъ такъ:



Вы получили нѣмецкое слово ZEHN (десять).

Подбныхъ задачъ можно придумать сколько угодно. Полезны онѣ не въ математическомъ, а въ общеобразовательномъ отношенiи.





Разныя задачи.

Задача 15-я.

Вмѣсто мелкихъ долей крупныя.

Раздѣлить поровну 5 пряниковъ между 6-ю мальчиками, не разрѣзая ни одного пряника на 6 равныхъ частей.

Рѣшеніе.

Если мы изъ 5 данныхъ пряниковъ 3 разрѣжемъ пополамъ, то получимъ 6 равныхъ кусковъ, каждый изъ которыхъ и отдадимъ мальчикамъ. Затѣмъ 2 остальныхъ пряника разрѣжемъ каждый на 3 равныхъ части и получимъ опять шесть равныхъ кусковъ, которые и отдадимъ мальчикамъ. Такимъ образомъ задача рѣшена, при чемъ ни одного пряника не пришлось разрѣзать на 6 частей.

Подобныхъ задачъ можно, конечно, придумать, сколько угодно. Такъ, напримѣръ, въ данной задачѣ вмѣсто чиселъ 5 и 6 могутъ быть поставлены слѣдующія числа: 7 на 12, 7 на 6, 7 на 10, 9 на 10, 11 на 10, 13 на 10, 5 на 12, 11 на 12, 13 на 12, 9 на 14, 11 на 14, 13 на 14, 15 на 14, 17 на 14 и т. д.

Во всѣхъ задачахъ подобнаго рода требуется мелкія доли привести въ болѣе крупныя. Разнообразить ихъ можно всячески, предлагая, напримѣръ, такіе вопросы:

Можно ли 5 листовъ бумаги раздѣлить между восемью учениками, не дѣля ни одного листа на восьмыя доли?

Подобныя задачи очень полезны для отчетливаго и быстраго пониманія дробей.

Задача 16-я.

Сумма послѣдовательныхъ чиселъ.

Понятіе объ ариѳметической прогрессіи.

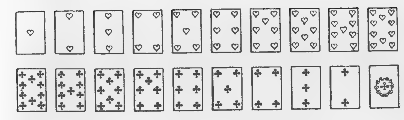
Для нижеслѣдующей задачи можно пользоваться обыкновенными игральными или игрушечными картами. Если бы ихъ не нашлось, то не трудно изъ бумаги нарѣзать карточки и нарисовать на нихъ карандашомъ или чернилами черные кружочки. На первой—одинъ кружочекъ, на второй – 2, на третьей—3 и т. д. до десяти.

Теперь мы вполнѣ подготовлены для практическаго рѣшенія такой задачи:

Взято десять картъ (или сдѣланныхъ нами карточекъ) одной масти, отъ туза до десятки. Вычислить, сколько всего очковъ будетъ въ этихъ десяти картахъ, не прикладывая послѣдовательно очковъ первой карты ко второй, этихъ двухъ къ третьей, этихъ трехъ къ четвертой и т. д., т. е. не дѣлая длиннаго ряда послѣдовательныхъ сложеній.

Рѣшеніе.

Дѣло сводится, значитъ, къ тому, чтобы быстро, безъ послѣдовательнаго сложенія узнать сумму первыхъ десяти чиселъ (отъ 1 до 10). Беремъ десять картъ (напр. червей) отъ туза до десятки и кладемъ ихъ въ рядъ (фиг. 16): тузъ, двойка, тройка и т. д. до десятки. Беремъ затѣмъ десять другихъ картъ (напр. трефъ) и подкладываемъ ихъ подъ первымъ рядомъ, но только въ обратномъ порядкѣ: десятка, девятка и т. д.



Фиг. 16.

У насъ получается два *ряда* по десяти картъ или десять *столбцовъ* по двѣ карты. Если сосчитать, сколько очковъ въ каждомъ столбцѣ, окажется, что *въ каждомъ* столбцѣ по *одиннадцати* очковъ. А всего въ десяти столбцахъ или въ двухъ рядахъ картъ — десять разъ по одиннадцати очковъ, или 110 очковъ. Но въ обоихъ длинныхъ рядахъ, очевидно, по одинаковому числу очковъ. Значитъ, сумма всѣхъ очковъ одного ряда равна половинѣ 110, т. е. равна 55. Итакъ, въ десяти картахъ отъ туза до 10-ти 55 очковъ.

Не трудно видѣть, что подобнымъ же образомъ, не прибѣгая къ послѣдовательному сложенію, мы можемъ вычислить сумму любого ряда цѣлыхъ послѣдовательныхъ чиселъ до любого даннаго числа. Напримѣръ, сумма всѣхъ чиселъ отъ 1 до 100 будетъ равна половинѣ сто разъ взятаго 101, т. е. 5 050.

Задача 17-я.

Сборъ яблокъ.

На разстояніи аршина одно отъ другого лежатъ въ рядъ сто яблокъ, и на аршинъ же отъ перваго яблока садовникъ принесъ и поставилъ корзину. Спрашивается, какой длины путь совершитъ онъ, если возьмется собрать эти яблоки такъ, чтобы брать ихъ послѣдовательно одно за другимъ и каждое отдѣльно относить въ корзину, которая все время стоитъ на одномъ и томъ же мѣстѣ?

Рѣшеніе.

Нужно подойти къ каждому яблоку и возвратиться обратно къ корзинѣ. Значитъ, число пройденныхъ аршинъ будетъ равно удвоенной суммѣ первыхъ ста чиселъ, или сто разъ взятому 101, т. е. 10 100 аршинъ. Это составитъ почти ровно *семь верстъ!* Какъ видимъ, способъ собиранія довольно утомительный!

Задача 18-я.

Бой часовъ.

Сколько ударовъ въ сутки дѣлаютъ часы съ боемъ?

Рѣшеніе.

Наибольшее количество ударовъ, отбиваемыхъ обыкновенными часами, есть 12. Задача сводится, значитъ, къ тому, чтобы узнать сумму всѣхъ чиселъ отъ 1 до 12. А это, мы уже знаемъ, будетъ половина двѣнадцать разъ взятыхъ тринадцати. Но въ суткахъ два раза 12 часовъ, или 24 часа. Значитъ часы сдѣлаютъ ровно 12 разъ по 13 ударовъ, т. е. 156 ударовъ ($12 \times 13 = 156$).

Если же часы отбиваютъ также и получасы, то сколько всего ударовъ они дѣлаютъ въ сутки? Полагаю, что вы безъ труда отвѣтите на этотъ вопросъ.

Задача 19-я.

Продажа яблокъ.

Крестьянка принесла на базаръ для продажи корзину яблокъ. Первому покупателю она продала половину всѣхъ своихъ яблокъ и еще полъ-яблока; второму — половину остатка и еще полъ-яблока, третьему—половину остатка да еще полъ-яблока и т. д. Когда же пришелъ шестой покупатель и купилъ у нея половину оставшихся яблокъ и полъ-яблока, то

оказалось, что у него, какъ и у остальныхъ покупателей, всѣ яблоки цѣлыя, и что крестьянка продала всѣ свои яблоки. Сколько яблокъ она принесла на базаръ?

Рѣшеніе.

Задача рѣшается тотчасъ, если сообразить, что послѣднему (шестому) покупателю досталось одно цѣлое яблоко. Значитъ: пятому досталось 2 яблока, четвертому **4**, третьему 8 и т. д. Всего же яблокъ было

$$1+2+4+8+16+32=\mathbf{63}.$$

Крестьянка принесла на базаръ 63 яблока.

Задача 20-я.

Воришка съ яблоками.

Предыдущую задачу предлагаютъ иногда въ такомъ болѣе простомъ, но забавномъ варіантѣ:

Воришка залѣзъ въ чужой садъ и набралъ яблокъ. Подкрался сторожъ, поймалъ его, сосчиталъ наворованныя яблоки, но, въ виду слезъ и раскаянія воришки, говоритъ:

— Ладно, я отпущу тебя, только съ уговоромъ: отдай мнѣ половину всѣхъ яблокъ да еще полъ-яблока.

Ни у сторожа, ни у воришки ножа не было, да онъ и не понадобился. Воришка отдалъ сторожу столько яблокъ, сколько тотъ потребовалъ, и пустился бѣжать безъ оглядки: да на-бѣду наткнулся на другого сторожа. Этотъ тоже сосчиталъ яблоки у воришки и говоритъ:

— Отдай половину да еще полъ-яблока.

Пришлось подѣлиться и съ этимъ сторожемъ, и опять безъ ножа.

У самаго забора воришку остановилъ третій сторожъ. И этотъ отобралъ у него половину яблокъ да еще полъ-яблока. Наконецъ воришка уже перелѣзъ черезъ заборъ и вздохнулъ было свободно, какъ его схватилъ четвертый сторожъ.

— Отдавай половину яблокъ да еще полъ-яблока!

Воришка обшарилъ карманы и нашелъ только одно яблоко. Нечего дѣлать,—пришлось отдать сторожу послѣднее яблоко, а самому уйти, не солоно хлебавши.

Не сумѣете ли узнать, сколько яблокъ набралъ воришка въ саду?

Рѣшеніе.

Послѣ предыдущей задачи отвѣтить, что воришка набралъ было 15 яблокъ, не трудно.

Задача 21-я.

Каждому свое.

Шли два крестьянина, и было у нихъ три одинаковаго вѣса и стоимости хлѣба: у одного два хлѣба, а у другого одинъ. Пришло время обѣдать. Они сѣли и достали свои хлѣбы. Тогда къ нимъ подошелъ третій крестьянинъ и попросилъ подѣлиться съ нимъ хлѣбомъ, обѣщая заплатить за свою долю. Ему дали одинъ хлѣбъ, а онъ уплатилъ 15 коп. Какъ должны подѣлить два первыхъ крестьянина эти деньги?

Рѣшеніе.

Тотъ, кто отдалъ свой второй хлѣбъ, очевидно, и возьметъ себѣ всѣ деньги.

Задача 22-я.

Какъ подѣлить?

Два путника сѣли обѣдать. У одного было 5 лепешекъ, а у другого 3. Всѣ лепешки были одинаковой стоимости. Подошелъ къ нимъ третій путникъ, не имѣвшій чего ѣсть, и предложилъ пообѣдать этими лепешками сообща, обѣщая уплатить имъ деньги за ту часть лепешекъ, которая придется на его долю. Пообѣдавъ, онъ заплатилъ за съѣденныя имъ лепешки 8 копѣекъ. Спрашивается, какъ первые два путника должны раздѣлить эти деньги?

Рѣшеніе.

По условію задачи выходитъ, что всѣ лепешки стоили 24 коп., такъ какъ расходъ каждаго путника равенъ 8 коп. Отсюда слѣдуетъ, что каждая лепешка стоитъ 3 коп. Итакъ, тотъ путникъ, который далъ 5 лепешекъ, издержалъ 15 коп., и если вычесть отсюда 8 коп. за лепешки, съѣденныя имъ самимъ, то выходитъ, что ему нужно изъ денегъ третьяго путника получить 7 коп. Разсуждая точно такъ же, находимъ, что второй путникъ имѣлъ лепешекъ на 9 коп., и что ему приходится изъ денегъ третьяго получить 1 коп.

Задача 23-я.

За кашу.

Два человѣка варили кашу. Одинъ далъ для этого 2 фунта крупъ, а другой 3 фунта. Когда каша была готова, подошелъ третій человѣкъ и попросилъ позволенія съѣсть съ ними кашу за плату. Послѣ ѣды онъ уплатилъ 5 коп. Какъ раздѣлили эти деньги варившіе кашу?

Рѣшеніе.

Рѣшается задача совершенно подобно предыдущей. И деньги подѣлены такъ: одинъ получилъ 4 коп., а другой 1 коп. (Какъ и въ предыдущей задачѣ, секретъ заключается въ томъ, что сразу чаще всего говорятъ: «Одинъ получилъ 2 коп., а другой 3 коп.).

Задача 24-я.

Кто правъ?

Два крестьянина, Никита и Павелъ, работали вмѣстѣ въ лѣсу и сѣли завтракать. У Никиты было 4 лепешки, у Павла 7. Тутъ къ крестьянамъ подошелъ охотникъ.

Вотъ, братцы, заблудился въ лѣсу, до деревни далеко, а ѣсть смерть хочется: подѣлитесь со мною хлѣбомъ-солью!

— Ну, что-жъ, садись; чѣмъ богаты, тѣмъ и рады,— сказали Никита и Павелъ.

11 лепешекъ были раздѣлены поровну на троихъ. Послѣ завтрака охотникъ пошарилъ въ карманахъ, нашелъ серебряный гривенникъ и мѣдную копѣйку и отдаетъ крестьянамъ:

— Не обезсудьте, братцы, больше при себѣ ничего нѣтъ! Подѣлитесь, какъ знаете!

Охотникъ ушелъ, а крестьяне заспорили. Никита говорилъ:

— По-моему, деньги надо раздѣлить поровну!..

А Павелъ ему возражалъ:

— За 11 лепешекъ 11 копѣекъ. На лепешку приходится по копѣйкѣ. У тебя было 4 лепешки, тебѣ 4 копѣйки, у меня 7 лепешекъ, мнѣ 7 копѣекъ!..

Кто изъ нихъ сдѣлалъ правильный расчетъ?

Рѣшеніе.

И Никита и Павелъ дѣлаютъ неправильный расчетъ. 11 лепешекъ раздѣлены на троихъ поровну: значитъ, каждый съѣлъ $^{11}/_{3}$ (11 третей), т. е. $3^{2}/_{3}$ лепешки.

У Павла было 7 лепешекъ, онъ съѣлъ $3^{2}/_{3}$; слѣдовательно, охотнику отдалъ $3^{1}/_{3}$ лепешки, или $^{10}/_{3}$ (10 третей) лепешки.

Никита изъ 4-хъ своихъ лепешекъ съѣлъ тоже $3^{2}/_{3}$; слѣдовательно, охотнику отдалъ $^{1}/_{3}$ (одну треть) лепешки.

Охотникъ съѣлъ 11 третей лепешки и заплатилъ за нихъ 11 копѣекъ; значитъ за каждую треть лепешки онъ далъ по копѣйкѣ. У Павла онъ взялъ 10 третей, у Никиты—одну треть: слѣдовательно, Павелъ долженъ взять себѣ серебряный гривенникъ, а Никита—мѣдную копѣйку.

Задача 25-я.

Фальшивая бумажка.

Одинъ господинъ зашелъ въ магазинъ, чтобы купить себѣ шляпу. Выбранная имъ шляпа стоила 10 рублей. Онъ далъ хозяину 25-ти-рублевый кредитный билетъ и попросилъ сдачу. У хозяина не было мелкихъ денегъ. Поэтому онъ послалъ данный ему билетъ для размѣна въ сосѣдній магазинъ. Тамъ его размѣняли. Хозяинъ, получивъ мелкія деньги, далъ покупателю сдачу, и тотъ ушелъ. Спустя нѣкоторое время прибѣжали изъ магазина, гдѣ производился размѣнъ, и заявили, что данный имъ кредитный билетъ—фальшивый. Хозяинъ шляпнаго магазина взялъ 25-ти-рублевый фальшивый кредитный билетъ обратно, уничтожилъ его и отдалъ размѣнявшему магазину 25 рублей настоящими деньгами. Спрашивается, кто и сколько потерялъ при этомъ денегъ?

Рѣшеніе.

Очень часто путаются при рѣшеніи этой задачи и даютъ различные отвѣты. Рѣшеніе, однако, одно, и притомъ оно очень просто: потерялъ только хозяинъ шляпнаго магазина и потерялъ ровно 25 рублей.

Задача 26-я.

Велосипедисты и мухи.

Два города А и В находятся на разстояніи 300 верстъ другъ отъ друга. Точно въ одинъ день, часъ, минуту и секунду изъ этихъ городовъ выѣзжаютъ другъ другу навстрѣчу два велосипедиста и мчатся, не останавливаясь, со скоростью 50 верстъ въ часъ. По вмѣстѣ съ первымъ велосипедистомъ изъ города А вылетаетъ муха, пролетающая въ часъ 100 верстъ. Муха опережаетъ перваго велосипедиста, летитъ навстрѣчу другому, выѣхавшему изъ В. Встрѣтивъ этого, она тотчасъ поворачиваетъ назадъ къ велосипедисту А. Повстрѣчавъ его, опять летитъ обратно навстрѣчу къ велосипедисту В и такъ повторяетъ свое летаніе взадъ и впередъ до той поры, пока велосипедисты не съѣхались. Тогда она успокоилась и сѣла одному изъ велосипедистовъ на шапку. Сколько верстъ пролетѣла муха?

Рѣшеніе.

Очень часто при рѣшеніи этой задачи пускаются въ разныя «тонкія» и сложныя выкладки и соображенія, не давъ себѣ труда уяснить, что муха, не останавливаясь, летала ровно 3 часа, а слѣдовательно пролетѣла 300 верстъ.

Задача 27-я.

Портной.

Портной имѣетъ кусокъ сукна въ 16 аршинъ, отъ котораго онъ отрѣзаетъ ежедневно по 2 аршина. По истеченіи сколькихъ дней онъ отрѣжетъ послѣдній кусокъ?

Рѣшеніе.

Отвѣтъ таковъ: «По истеченіи 7 дней», а не восьми, какъ, можетъ быть, скажетъ иной.

Задача 28-я.

Гусеница.

Въ шесть часовъ утра въ воскресенье гусеница начала всползать на дерево. Въ теченіе дня, т. е. до 6 часовъ вечера, она всползала на высоту 5 аршинъ, а въ теченіе ночи спускалась на 2 аршина. Въ какой день и часъ она всползетъ на высоту 9 аршинъ?

Рѣшеніе.

Часто при рѣшеніи подобныхъ задачъ разсуждаютъ такъ: гусеница въ сутки, т. е. въ 24 часа, всползетъ на 5 аршинъ безъ 2. Значитъ, всего въ сутки она всползаетъ на 3 аршина. Слѣдовательно, высоты 9 аршинъ она достигнетъ по истеченіи трехъ сутокъ, т. е. она будетъ на этой высотѣ въ среду въ 6 часовъ утра.

Но такой отвѣтъ, очевидно, невѣренъ: въ концѣ вторыхъ сутокъ, т. е. во вторникъ въ 6 часовъ утра, гусеница будетъ на высотѣ 6 аршинъ; но въ этотъ же день, начиная съ шести часовъ утра, она до шести часовъ вечера можетъ всползти еще на 5 аршинъ. Слѣдовательно, на высотѣ 9-ти аршинъ, какъ легко разсчитать, она окажется во вторникъ въ 1 часъ 12 минутъ пополудни.

Задача 29-я.

Размѣнъ.

Какъ размѣнять одинъ 25-ти-рублевый кредитный билетъ на 10 кредитныхъ билетовъ?

Рѣшеніе.

Одинъ 10-ти-рублевый, одинъ 5-ти-рублевый, одинъ 3-хъ-рублевый и 7 рублевыхъ:

$$(10+5+3+1+1+1+1+1+1+1=25).$$

Читателю не трудно будетъ составить не одну задачу, подобную этой. Извѣстная (и не одна только практическая) польза ихъ неоспорима.

Задача 30-я.

Тоже иными знаками.

Написать 100 шестью одинаковыми цифрами.

Рѣшеніе.

$$99\frac{99}{99}.$$

Замѣчаніе.

Задача, очевидно, можетъ видоизмѣняться всячески, и желающій можетъ придумать не одну задачу, подобную этой.

Нижеслѣдующее даетъ еще образцы подобныхъ же задачъ.

Задача 31-я.

Написать число 9 посредствомъ десяти различныхъ цифръ (девяти значащихъ и одной незначащей).

Рѣшеніе.

Число девять можетъ быть представлено въ видѣ частнаго отъ дѣленія одного пятизначнаго числа на другое, при чемъ цифры обоихъ чиселъ будутъ различны. Дадимъ 6 такихъ рѣшеній:

$$\frac{97524}{10836}, \frac{95823}{10647}, \frac{95742}{10638}, \frac{75249}{08361}, \frac{58239}{06471}, \frac{57429}{06381}.$$

Задача 32-я.

Изобразить число 100 посредствомъ девяти различныхъ значащихъ цифръ.

Рѣшеніе.

Задача имѣетъ много разныхъ рѣшеній. Дадимъ изъ нихъ такія:

$$91\frac{5742}{638},\ 91\frac{7524}{836},\ 91\frac{5823}{647},\ 94\frac{1578}{263},\ 96\frac{2148}{537},$$

$$96\frac{1428}{357},\ 96\frac{1752}{438}.$$

Вотъ еще рѣшенія, содержащія знакъ $+$:

$$100 = 97 + \frac{5+3}{8} + \frac{6}{4} + \frac{1}{2}$$

$$100 = 75 + 24 + \frac{9}{18} + \frac{3}{6}$$

$$\begin{array}{r} 95\frac{1}{2} \\ + \\ 4\frac{38}{76} \\ \hline 100 \end{array}$$

И т. д. Сюда же можно отнести и такое рѣшеніе данной задачи въ *цѣлыхъ числахъ:*

$$\begin{array}{r} 46 \\ +\ 37 \\ 15 \\ \hline 98 \\ +\ 2 \\ \hline 100 \end{array} \quad \text{или:} \quad \begin{array}{r} 56 \\ 8 \\ +\ 4 \\ 3 \\ \hline 71 \\ +\ 29 \\ \hline 100 \end{array}$$

Какъ видимъ, въ предпослѣднемъ рѣшеніи допущенъ нѣкорый «фокусъ». Сначала изъ 6-ти разныхъ цифръ составлено три числа, дающихъ въ суммѣ 98 — число, опять-таки составленное изъ двухъ новыхъ цифръ, и къ нему прибавляется число, изображенное недостающей цифрой 2. Въ суммѣ получается требуемое число 100. Подобно же составлено и послѣднее рѣшеніе.

Задача 33-я.

Замѣчетельное число.

Нѣкоторое число оканчивается на 2. Если же эту его послѣднюю цифру переставить на первое мѣсто, то число это удвоится. Найти это число.

Рѣшеніе.

Такъ какъ при перенесеніи цифры 2 на первое мѣсто число удваивается, то предпослѣдняя цифра его должна быть 4, предшествующая этой должна быть 8, предъ этой 6, предъ этой 3, затѣмъ 7, затѣмъ 4, затѣмъ 9 и т. д. Разсуждая подобнымъ образомъ, находимъ, что искомое число есть

105 263 157 894 736 842.

Замѣчаніе. Правильнѣе будетъ сказать, что искомое число состоитъ изъ ряда *«періодовъ»*, составленныхъ найденнымъ числомъ.





Дѣлежи при затруднительныхъ обстоятельствахъ.

Задача 34-я.

Дѣлежъ между тремя.

Три лица должны подѣлить между собой двадцать одинъ боченокъ, изъ которыхъ 7 боченковъ полныхъ вина, 7 полныхъ наполовину и 7 пустыхъ. Спрашивается, какъ они могутъ подѣлиться такъ, чтобы каждый имѣлъ одинаковое количество вина и одинаковое количество боченковъ, при чемъ переливать вино изъ боченка въ боченокъ нельзя.

Рѣшеніе.

Предполагается, конечно, что всѣ боченки—полные, полные наполовину и пустые—равны между собою. Ясно, что каждый долженъ получить по семи боченковъ. Подсчитаемъ теперь, сколько же вина должно прійтись на долю каждаго. Есть семь боченковъ полныхъ и семъ пустыхъ. Если бы можно было отъ каждаго полнаго боченка отлить половину въ пустой, то получилось бы 14 наполовину полныхъ боченковъ; прибавляя къ нимъ еще 7 имѣющихся наполовину полныхъ, мы получили бы всѣхъ 21 полныхъ наполовину боченковъ. Значитъ, на долю

каждаго должны прійтись по *семи* наполовину полныхъ боченковъ вина. Сообразивъ это, получаемъ, что, не переливая вина, можно подѣлить все поровну такъ:

	Полные боченки.	Полные наполовину боченки.	Пустые боченки.
Первое лицо	2	3	2
Второе »	2	3	2
Третье »	3	1	3

А вотъ и другое рѣшеніе:

Полные боченки.	Полные наполовину боченки.	Пустые боченки.
3	1	3
3	1	3
1	5	1

Задача 35-я.

Дѣлежъ между двумя.

Двое должны раздѣлить поровну восемь ведеръ вина, находящагося въ восьмиведерномъ же боченкѣ. Но у нихъ есть еще только два пустыхъ боченка, въ одинъ изъ которыхъ входитъ 5 ведеръ, а въ другой—3 ведра. Спрашивается, какъ они могутъ раздѣлить это вино, пользуясь только этими тремя боченками.

Рѣшеніе.

Задача эта, какъ и всѣ ей подобныя, имѣетъ 2 рѣшенія, и рѣшенія эти состоятъ, очевидно, въ томъ, что изъ полнаго восьмиведернаго боченка нужно отливать вино въ пустые боченки, изъ этихъ переливать опять и т. д.

Дадимъ эти рѣшенія въ видѣ 2-хъ таблицъ, которыя показываютъ, сколько въ каждомъ боченкѣ остается вина послѣ каждаго переливанія.

Рѣшеніе 1-е.

	Боченки.		
	8-ведерн.	5-ведерн.	3-ведерн.
До переливанія —	8	0	0
Послѣ 1-го пер. —	3	5	0
» 2-го » —	3	2	3
» 3-го » —	6	2	0
» 4-го » —	6	0	2
» 5-го » —	1	5	2
» 6-го » —	1	4	3
» 7-го » —	4	4	0

Рѣшеніе 2-е.

	Боченки.		
	8-ведерн.	5-ведерн.	3-ведерн.
До переливанія —	8	0	0
Послѣ 1-го пер. —	5	0	3
» 2-го » —	5	3	0
» 3-го » —	2	3	3
» 4-го » —	2	5	1
» 5-го » —	7	0	1
» 6-го » —	7	1	0
» 7-го » —	4	1	3
» 8-го » —	4	4	0

Вотъ еще подобныя же задачи:

Задача 36-я.

Полный боченокъ содержитъ 16 вед., а пустые— 11 и 6 вед.

1-е рѣшеніе.			2-е рѣшеніе.		
16-вед.	11-вед.	6-вед.	16-вед.	11-вед.	6-вед.
16	0	0	16	0	0
5	11	0	10	0	6
5	5	6	10	6	0
11	5	0	4	6	6
11	0	5	4	11	1
0	11	5	15	0	1

1-е рѣшеніе.

16-вед.	11-вед.	6 вед.
0	10	6
6	10	0
6	4	6
12	4	0
12	0	4
1	11	4
1	9	6
7	9	0
7	3	6
13	3	0
13	0	3
2	11	3
2	8	6
8	8	0

2-е рѣшеніе.

16-вед.	11-вед.	6-вед.
15	1	0
9	1	6
9	7	0
3	7	6
3	11	2
14	0	2
14	2	0
8	2	6
8	8	0

Задача 37-я.

Полный боченокъ заключаетъ 42 ведра, а пустые— по 27 и 12 вед.

1-е рѣшеніе.

42-вед.	27-вед.	12-вед.
42	0	0
15	27	0
15	15	12
27	15	0
27	3	12
39	3	0
39	0	3
12	27	3
12	18	12
24	18	0
24	6	12
36	6	0
36	0	6
9	27	6
9	21	12
21	21	0

2-е рѣшеніе.

42-вед.	27-вед.	12-вед.
42	0	0
30	0	12
30	12	0
18	12	12
18	24	0
6	24	12
6	27	9
33	0	9
33	9	0
21	9	12
21	21	0

Задача 38-я.

Мужикъ и чортъ.

Шелъ мужикъ и думалъ: «Эхъ-ма! жизнь моя горькая! Заѣла нужда совсѣмъ! Вотъ въ карманѣ только нѣсколько грошей мѣдныхъ болтается, да и тѣ сейчасъ нужно отдать. И какъ это у другихъ бываетъ, что на всякія свои деньги они еще деньги получаютъ? Глядишь: на рубль зашибаетъ онъ два, на два—четыре, на четыре—восемь, и все богатѣетъ да богатѣетъ... Вотъ ежели бы, къ примѣру, и мнѣ такъ! Изъ денегъ, что у меня въ карманѣ, сдѣлалось бы сейчасъ вдвое, а черезъ пять минутъ изъ этихъ еще вдвое, да еще черезъ пять минутъ опять вдвое, и такъ пошло бы и пошло... Скоро бы богатымъ сдѣлался... Такъ нѣтъ! Не видать мнѣ такого счастья! Никто не поможетъ. Эхъ! Право, хоть бы чортъ какой помочь захотѣлъ, такъ и то бы я не отказался»...

Только успѣлъ это подумать, какъ, глядь, а чортъ передъ нимъ и стоитъ.

— Что-жъ,—говоритъ,—если хочешь, я тебѣ помогу. И это совсѣмъ нетрудно. Вотъ видишь этотъ мостъ черезъ рѣчку?

— Вижу!—говоритъ мужикъ, а самъ заробѣлъ.

— Ну такъ стоитъ тебѣ перейти только черезъ мостъ,—и у тебя будетъ вдвое больше денегъ, чѣмъ есть. Перейдешь назадъ, опять станетъ вдвое больше, чѣмъ было. И каждый разъ, какъ ты будешь переходить мостъ, у тебя будетъ ровно вдвое больше денегъ, чѣмъ было до этого перехода.

— Ой-ли?—говоритъ мужикъ.

— Вѣрно слово!—увѣряетъ чортъ.—Только, чуръ, уговоръ! За то, что я тебѣ устраиваю такое счастье, ты каждый разъ, перейдя черезъ мостъ, отдавай мнѣ

по 24 копѣйки за добрый совѣтъ. Иначе ничего не будетъ.

— Ну, что же, это не бѣда! говоритъ мужикъ.— Разъ деньги все будутъ удваиваться, такъ отчего же 24 копѣекъ тебѣ каждый разъ не дать? Ну-ка попробуемъ!

Перешелъ онъ черезъ мостъ одинъ разъ, сосчиталъ деньги... Что за диво? Дѣйствительно, стало вдвое больше. Бросилъ онъ 24 копѣйки чорту и перешелъ черезъ мостъ второй разъ. Опять денегъ стало вдвое больше, чѣмъ передъ этимъ. Отсчиталъ онъ 24 копѣйки, отдалъ чорту и перешелъ черезъ мостъ третій разъ. Денегъ стало снова вдвое больше. Но только и оказалось ихъ ровнехонько 24 коп., которыя по уговору... онъ долженъ былъ отдать чорту. Отдалъ онъ ихъ, и остался безъ копѣйки.

Ударилъ мужикъ о полы и началъ судьбу свою клясть. А чортъ захохоталъ и съ глазъ сгинулъ.

Сколько же, значитъ, у мужика сначала денегъ въ карманѣ было?

Рѣшеніе.

Задача разрѣшается очень легко, если только рѣшеніе ея начать съ конца, принявъ во вниманіе, что послѣ третьяго перехода у крестьянина оказалось ровно 24 копѣйки, которыя онъ долженъ былъ отдать.

Въ самомъ дѣлѣ, если послѣ послѣдняго перехода у крестьянина оказалось ровно 24 коп., то, значитъ, передъ этимъ переходомъ у него было 12 коп. Но эти 12 коп. получились послѣ того, какъ онъ отдалъ 24 коп.; значитъ, всего денегъ у него было 36 коп. Слѣдовательно, второй переходъ онъ началъ съ 18-ю коп., а эти 18 коп. получились у него послѣ того, какъ онъ въ первый разъ перешелъ мостъ и отдалъ 24 коп. Значитъ, всего послѣ перваго перехода у него было денегъ 18 да 24 коп., т. е. 42 копѣйки. Отсюда ясно, что передъ тѣмъ,

какъ первый разъ вступить на мостъ, крестьянинъ имѣлъ въ карманѣ 21 копѣйку собственныхъ денегъ.

Прогадалъ крестьянинъ! Видно, что на чужой совѣтъ всегда надо еще свой умъ имѣть.

Зада а 39-я.

Крестьяне и картофель.

Шли три крестьянина и зашли на постоялый дворъ отдохнуть да пообѣдать. Заказали хозяйкѣ сварить картофель, а сами заснули. Хозяйка сварила картофель, но не стала будить постояльцевъ, а поставила миску съ ѣдою на столъ и ушла. Проснулся одинъ крестьянинъ, увидѣлъ картофель и, чтобы не будить товарищей, сосчиталъ картофель, съѣлъ свою долю и снова заснулъ. Вскорѣ проснулся другой; ему невдомекъ было, что одинъ изъ товарищей уже съѣлъ свою долю; поэтому онъ сосчиталъ весь оставшійся картофель, съѣлъ третью часть и опять заснулъ. Послѣ него проснулся третій; полагая, что онъ проснулся первый, онъ сосчиталъ оставшійся въ чашкѣ картофель и съѣлъ третью часть. Тутъ проснулись его товарищи и увидѣли, что въ чашкѣ осталось 8 картофелинъ. Тогда только объяснилось дѣло. Разочтите: сколько картофелинъ подала на столъ хозяйка, сколько съѣлъ уже и сколько имѣетъ право еще съѣсть каждый, чтобы всѣмъ досталось поровну?

Рѣшеніе.

Третій крестьянинъ оставилъ для товарищей 8 картофелинъ, т. е. каждому по 4 штуки. Значитъ, и самъ онъ съѣлъ 4 картофелины. Послѣ этого легко сообразить, что 2-й крестьянинъ оставилъ своимъ товарищамъ 12 картофелинъ,—по 6-ти на брата,—значитъ и самъ съѣлъ 6 штукъ. Отсюда слѣдуетъ, что

первый крестьянинъ оставилъ товарищамъ 18 картофелинъ,— по 9 штукъ на каждаго, значитъ и самъ съѣлъ 9 штукъ.

Итакъ, хозяйка подала на столъ 27 картофелинъ, и на долю каждаго, поэтому, приходилось по 9 картофелинъ. Но 1-й крестьянинъ всю свою долю съѣлъ. Слѣдовательно, изъ 8-ми оставшихся картофелинъ приходится на долю второго 3, а на долю третьяго 5 штукъ.

Задача 40-я.

Три игрока.

Три игрока условились сыграть три партіи такъ, чтобы проигравшій партію давалъ каждому изъ остальныхъ двухъ игроковъ по столько денегъ, сколько у каждаго изъ выигравшихъ имѣется. Сыграли три партіи, при чемъ оказалось, что проигрывали всѣ поочередно, и послѣ этого у каждаго стало по 24 рубля. По сколько рублей было у каждаго передъ началомъ игры?

Рѣшеніе.

Третій игрокъ проигралъ третью партію и удвоилъ количество денегъ каждаго изъ остальныхъ двухъ, послѣ чего у всѣхъ стало по 24 рубля. Слѣдовательно, послѣ второй игры, проигранной вторымъ игрокомъ, они имѣли: первый 12 руб., второй 12 руб., третій 48 рублей. Но передъ этимъ первый игрокъ и третій удвоили свои деньги, такъ какъ проигралъ второй. Значитъ, раньше первый имѣлъ 6 р., а третій 24 р.; второй же игрокъ имъ отдалъ изъ своихъ денегъ 30 руб. Итакъ, послѣ первой игры они имѣли: первый 6 руб., второй 42 руб., третій 24 руб. Но передъ этимъ проигралъ первый, а второй и третій игроки, значитъ, имѣли только по половинѣ вышеуказанныхъ суммъ. Слѣдовательно, первый, проигравъ, отдалъ имъ изъ бывшихъ у него денегъ 33 р. Итакъ, предъ началомъ игры игроки имѣли: первый 39 рублей, второй 21 рубль, третій 12 рублей.

Задача 41-я.

Два пастуха.

Сошлись два пастуха, Иванъ и Петръ. Иванъ и говоритъ Петру: «Отдай-ка ты мнѣ одну овцу, тогда у меня будетъ овецъ ровно вдвое больше, чѣмъ у тебя!» А Петръ ему отвѣчаетъ: «Нѣтъ! лучше ты мнѣ отдай одну овцу,—тогда у насъ будетъ овецъ поровну!»

Сколько же было у каждаго овецъ?

Задача старинная и многимъ извѣстная. Многіе знаютъ даже и отвѣтъ на эту задачу. Но какъ добраться до этого отвѣта, какъ понятно для всякаго рѣшить ее, знаютъ, надо полагать, немногіе. Попробуемъ добраться до этого рѣшенія

Рѣшеніе.

Ясно, что овецъ больше у перваго пастуха, у Ивана. Но на сколько у него больше, чѣмъ у Петра? Уяснимъ это.

Если Иванъ отдастъ одну овцу не Петру, а кому-либо другому, то станетъ ли у обоихъ пастуховъ овецъ поровну? Нѣтъ, потому что поровну у нихъ было бы только въ томъ случаѣ, если бы эту овцу получилъ Петръ. Значитъ, если Иванъ отдастъ одну овцу не Петру, а третьему лицу, то у него все-таки будетъ больше овецъ, чѣмъ у Петра, но на сколько больше? Ясно, что на одну овцу, потому что, если прибавить теперь къ стаду Петра одну овцу, то у обоихъ станетъ поровну. Отсюда слѣдуетъ, что пока Иванъ не отдастъ никому ни одной своей овцы, то у него въ стадѣ на **двѣ** овцы больше, чѣмъ у Петра.

Теперь примемся за второго пастуха, за Петра. У него, какъ мы нашли, на двѣ овцы меньше, чѣмъ у Ивана. Значитъ, если Петръ отдастъ, скажемъ, одну свою овцу не Ивану, а кому-либо иному, то тогда у Ивана будетъ на три овцы больше. чѣмъ у Петра. Но пусть эту овцу получитъ именно Иванъ, а не третье лицо. Ясно, что тогда у него будетъ на четыре овцы больше, чѣмъ осталось у Петра.

Но задача говоритъ, что у Ивана въ этомъ случаѣ будетъ ровно *вдвое* больше овецъ, чѣмъ у Петра. Стало быть, *четыре* и есть именно то число овецъ, которое останется у Петра, если онъ отдастъ одну овцу Ивану, у котораго получится *восемь* овецъ: А до предполагаемой отдачи, значитъ, у Ивана было **7**, а у Петра **5** овецъ.

Длинный рядъ разсужденій нужно употребить иногда для рѣшенія съ виду простой задачи.

Задача 42-я.

Недоумѣнія торговокъ.

Двѣ торговки сидѣли на базарѣ и продавали яблоки. Одна продавала за одну копѣйку два яблока, а другая за 2 копѣйки 3 яблока.

У каждой въ корзинѣ было по 30 яблокъ, такъ что первая разсчитывала выручить за свои яблоки 15 копѣекъ, а вторая 20 коп. Обѣ вмѣстѣ, значитъ, онѣ должны были выручить 35 копѣекъ. Смекнувъ это, торговки, чтобы не ссориться да не перебивать другъ у друга покупателей, рѣшили сложить свои яблоки вмѣстѣ и продавать ихъ сообща, при чемъ онѣ разсуждали такъ: «Если я продаю пару яблокъ за копѣйку, а ты—три яблока за двѣ копѣйки, то, чтобы выручить свои деньги, надо намъ, значитъ, продавать *пять* яблокъ за *три* копѣйки!»

Сказано, сдѣлано. Сложили торговки свои яблоки вмѣстѣ (получилось всего 60 яблокъ) и начали продавать по 3 копѣйки 5 яблокъ.

Распродали и удивились: оказалось, что за свои яблоки онѣ выручили 36 копѣекъ, т. е. на копѣйку больше, чѣмъ думали выручить! Торговки задумались: откуда взялась «*лишняя*» копѣйка, и кому изъ нихъ слѣдуетъ ее получить? Да и какъ, вообще, имъ подѣлить теперь всѣ вырученныя деньги?

И въ самомъ дѣлѣ, какъ это вышло?

Пока эти двѣ торговки разбирались въ своей неожиданной прибыли, двѣ другія, прослышавъ объ этомъ, тоже рѣшили заработать лишнюю копѣйку.

У каждой изъ нихъ было тоже по 30 яблокъ, но продавали онѣ такъ: первая давала за одну копѣйку пару яблокъ, а вторая за копѣйку же давала 3 яблока. Первая послѣ продажи должна была, значитъ, выручить 15 копѣекъ, а вторая — 10 копѣекъ; обѣ же вмѣстѣ выручали, слѣдовательно, 25 копѣекъ. Онѣ и порѣшили продать свои яблоки сообща, разсуждая совсѣмъ такъ, какъ и тѣ двѣ первыя торговки: если, молъ, я продаю за одну копѣйку пару яблокъ, а ты за копѣйку продасшь три яблока, то, значитъ, чтобы выручить свои деньги, намъ нужно каждыя пять яблокъ продавать за 2 копѣйки.

Сложили онѣ яблоки вмѣстѣ, распродали ихъ по 2 копѣйки за каждыя пять штукъ, и вдругъ... оказалось, что онѣ выручили всего 24 копѣйки, значитъ, недовыручили цѣлую копѣйку.

Задумались и эти торговки: какъ же это могло случиться? и кому изъ нихъ придется этой копѣйкой поплатиться?

Рѣшеніе.

Недоумѣнія торговокъ разрѣшаются очень быстро, если сообразимъ, что, сложивъ свои яблоки вмѣстѣ и начавъ ихъ продавать сообща, онѣ, сами того не замѣчая, продавали ихъ уже по другой цѣнѣ, чѣмъ раньше.

Возьмемъ, для примѣра, двухъ послѣднихъ торговокъ и разсмотримъ, что онѣ, въ сущности, сдѣлали.

Пока первая и вторая думали продавать свои яблоки отдѣльно, то цѣна одного яблока у первой была полкопѣйки, а у второй треть копѣйки. Когда же онѣ сложились и начали продавать каждыя пять яблокъ по 2 копѣйки, то цѣна каждаго яблока стала уже $\frac{2}{5}$ копѣйки.

Значитъ, первая торговка всѣ свои яблоки продала не по полкопѣйкѣ штуку, а по $^2/_5$ копѣйкѣ и на каждомъ яблокѣ теряла, значитъ, по $\frac{1}{10}$ копѣйки $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{5-5}{10}=\frac{1}{10}\right)$, а на всѣхъ тридцати яблокахъ она потеряла 3 коп.

Вторая же торговка, наоборотъ, вошедши въ компанію, выигрывала на каждомъ яблокѣ по $\frac{1}{16}$ копѣйки $\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{6-5}{15}=\frac{1}{15}\right)$, а на всѣхъ 30 яблокахъ выиграла, значитъ, 2 коп.

Первая потеряла 3 коп., а вторая выиграла только 2 коп. Въ общемъ, все-таки, копѣйка потеряна.

Путемъ подобныхъ же разсужденій легко узнать, почему у первыхъ двухъ торговокъ оказалась «лишняя копѣйка».

А какъ теперь онѣ должны подѣлить вырученныя деньги, разсудите-ка сами на основаніи предыдущихъ задачъ, гдѣ говорилось о правильныхъ дѣлежахъ денегъ.

Задача 43-я.

Какъ гусь съ аистомъ задачу рѣшали.

Летѣла стая гусей, а навстрѣчу имъ летитъ одинъ гусь и говоритъ: «Здравствуйте, сто гусей!» А передній старый гусь ему и отвѣчаетъ: «Нѣтъ, насъ не сто гусей! Вотъ еслибъ насъ было еще столько, да еще полстолько, да еще четверть столько, да ты, гусь,— то было бы сто гусей, а теперь... Вотъ и разсчитай-ка, сколько насъ?

Рѣшеніе.

Полетѣлъ одинокій гусь дальше и задумался. Въ самомъ дѣлѣ, сколько же товарищей-гусей онъ встрѣтилъ? Думалъ онъ, думалъ и съ какой стороны ни принимался,— никакъ не могъ этой задачи рѣшить. Вотъ увидѣлъ гусь на берегу пруда аиста,— ходитъ длинноногій и лягушекъ ищетъ. Аистъ птица важная и пользуется среди другихъ птицъ славой математика: по цѣлымъ часамъ иногда неподвижно на одной ногѣ стоитъ и все думаетъ, видно,— задачи рѣшаетъ. Обрадовался гусь, слетѣлъ

въ прудъ, подплылъ къ аисту и разсказалъ ему, какъ онъ стадо товарищей встрѣтилъ и какую ему гусь-поводырь загадку задалъ, а онъ никакъ этой загадки рѣшить не можетъ.

— Гм!.. откашлялся аистъ.—Попробуемъ рѣшить. Только будь внимателенъ и старайся понять! Слышишь?

— Слушаю и постараюсь!—отвѣтилъ гусь.

— Ну вотъ. Какъ тебѣ сказали? Если бы къ встрѣчнымъ гусямъ прибавить еще столько, да еще полстолько, да четверть столько, да тебя, гуся, то было бы сто? Такъ?

— Такъ!—отвѣтилъ гусь.

— Теперь смотри,—сказалъ аистъ.—Вотъ что я тебѣ начерчу здѣсь на прибрежномъ пескѣ.

Аистъ согнулъ шею и клювомъ провелъ черту, рядомъ такую же черту, потомъ половину такой же черты, затѣмъ четверть черты да еще маленькую черточку, почти точку.

Получилось слѣдующее:

|———|———|——|—| ·

Гусь подплылъ къ самому берегу, вышелъ, переваливаясь, на песокъ, смотрѣлъ, но ничего не понималъ.

— Понимаешь?—спросилъ аистъ.

— Нѣтъ еще!—отвѣтилъ уныло гусь.

— Эхъ, ты! Ну, вотъ смотри: какъ тебѣ сказали,—стадо да еще стадо, да половина стада, да четверть стада, да ты, гусь,—такъ я и нарисовалъ: черту да еще черту, да полъ-черты, да четверть этой черты, да еще маленькую черточку, т. е. тебя. Понялъ?

— Понялъ!—весело проговорилъ гусь.

— Если къ встрѣченному тобой стаду прибавить еще стадо, да полстада, да четверть стада, да тебя, гуся, то сколько получалось?

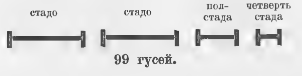
— Сто гусей!

— А безъ тебя сколько, значитъ, будетъ.

— Девяносто девять.

— Хорошо! Откинемъ на нашемъ чертежѣ черточку, изображающую тебя, гуся, и обозначимъ, что остается 99 гусей.

Аистъ заклевалъ носомъ и изобразилъ на пескѣ:



99 гусей.

— Теперь смекни-ка,—продолжалъ аистъ,—четверть стада, да полъ-стада, сколько это будетъ четвертей?

Гусь задумался, посмотрѣлъ на линіи на пескѣ и сказалъ:

— Линія, изображающая полъ-стада, вдвое больше, чѣмъ линія четверти стада, т. е. въ половинѣ заключается двѣ четверти. Значитъ, половина да четверть стада это все равно, что три четверти стада.

— Молодецъ!—похвалилъ гуся аистъ.—Ну, а въ *цѣломъ* стадѣ сколько четвертей?

— Конечно, четыре!—отвѣтилъ гусь.

— Такъ! Но мы имѣемъ здѣсь стадо да еще стадо, да полъ-стада да четверть стада, и это составитъ 99 гусей. Значитъ, если перевести все на четверти, то сколько всего четвертей будетъ?

Гусь подумалъ и отвѣтилъ.

— Стадо — это все равно, что 4 четверти стада, да еще стадо:—еще 4 четверти стада, всего 8 четвертей; да въ половинѣ стада 2 четверти: всего 10 четвертей; да еще четверть стада: всего 11 четвертей стада, и это составитъ 99 гусей.

— Такъ! сказалъ аистъ. — Теперь скажи, что же ты, въ концѣ концовъ, получилъ?

— Я получилъ,—отвѣтилъ гусь, что въ одиннадцати четвертяхъ встрѣченнаго мной стада заключается 99 гусей.

— А, значитъ, въ одной четверти стада сколько гусей?

Гусь подѣлилъ 99 на 11 и отвѣтилъ:

— Въ четверти стада—9 гусей.

— Ну, а въ цѣломъ стадѣ сколько?

— Въ цѣломъ заключается четыре четверти... Я встрѣтилъ **36 гусей!**—радостно воскликнулъ гусь.

— Вотъ то-то и оно! — важно промолвилъ аистъ. — Самъ, небось, не могъ дойти!.. Эхъ, ты... гусь!..

Задача 44-я.

Сколько было?

Бѣдная женщина несла для продажи корзину яицъ. Встрѣтившійся прохожій по неосторожности такъ толкнулъ ее, что корзина упала на землю, и всѣ яйца разбились. Прохожій захотѣлъ уплатить женщинѣ стоимость разбитыхъ яицъ и спросилъ, сколько ихъ всего было. «Я не помню этого, — сказала женщина, — знаю только хорошо, что когда я перекладывала яйца по 2, то оставалось одно яйцо. Точно также всегда оставалось по одному яйцу, когда я перекладывала ихъ по 3, по 4, по 5 и по 6. Когда же я перекладывала ихъ по 7, то не оставалось ни одного яйца». Спрашивается, сколько было яицъ?

Рѣшеніе.

Задача, очевидно, сводится къ нахожденію такого числа, которое дѣлится нацѣло (т. е. **безъ остатка**) на 7, а при дѣленіи на 2, 3, 4, 5 и 6 даетъ въ остаткѣ 1.

Наименьшее число, которое дѣлится безъ остатка на числа 2, 3, 4, 5 и 6 (**наименьшее кратное** этихъ чиселъ) есть 60, Нужно, значитъ, найти такое число, которое дѣлилось бы на 7 нацѣло и было бы вмѣстѣ съ тѣмъ на одну единицу больше числа, дѣлящагося на 60. Такое число тотчасъ можно найти путемъ послѣдовательныхъ попытокъ: 60, дѣленное на 7, даетъ въ остаткѣ 4, слѣдовательно 2×60 даетъ въ остаткѣ единицу ($2 \times 4 = 8$; $8 - 7 = 1$). Значитъ

$$2 \times 60 = \text{числу кратному } 7 + 1;$$

откуда слѣдуетъ, что

$$(7 \times 60 - 2 \times 60) + 1 = \text{числу кратному } 7;$$

$$\text{т. е. } 5 \times 60 + 1 = \text{числу кратному } 7.$$

$$5 \times 60 + 1 = 301.$$

Итакъ, наименьшее число, рѣшающее задачу, есть **301**.

Т. е. наименьшее **число яицъ, которое могло быть въ корзинѣ у женщины, есть 301.**

Задача 45-я.

Найти число, которое, будучи раздѣлено на 2, даетъ въ остаткѣ 1, при дѣленіи на 3 дастъ въ остаткѣ 2, при дѣленіи на 4 даетъ въ остаткѣ 3, при дѣленій на 5 даетъ въ остаткѣ 4, при дѣленіи на 7 даетъ въ остаткѣ 5, но на 7 это число дѣлится нацѣло.

Рѣшеніе.

Рѣшеніе тотчасъ сводится къ прудыдущему, если сообразить, что число кратное 6 да еще 5 есть въ то же время число кратное 6 безъ единицы, число кратное 5 да еще 4 есть въ то же время число кратное 5 безъ единицы и т. д. Итакъ, нужно для даннаго случая, чтобы удовлетворялось равенство:

Число кратное 7 = числу кратному 60 безъ 1;
или: число кратное 60 = числу кратному 7 + 1.

Число **120** есть наименьшее, рѣшающее задачу.

Задача рѣшается подобнымъ же путемъ и въ томъ случаѣ, когда разница между каждымъ дѣлителемъ и соотвѣтствующимъ остаткомъ есть число отличное отъ единицы.

Задача 46-я.

Часы заведены вѣрно!

У меня нѣтъ карманныхъ часовъ, а только стѣнные, которые остановились. Я отправляюсь къ своему знакомому, у котораго часы идутъ вѣрно, просиживаю у него нѣкоторое время и, возвратившись домой, ставлю свои часы вѣрно. Какимъ образомъ я могъ это сдѣлать, если предварительно мнѣ не было извѣстно, сколько времени занимаетъ дорога отъ меня до моего знакомаго?

Рѣшеніе.

Вопросъ, очевидно, сводится къ тому, чтобы знать точное время по возвращеніи домой. Для этой цѣли я завожу свои часы и передъ уходомъ замѣчаю ихъ показаніе, которое, положимъ, равно **a**. Приходя къ знакомому, немедленно справляюсь у него о времени, и пусть его часы показываютъ **b**. Передъ уходомъ отъ знакомаго опять замѣчаю время по его часамъ, которые на этотъ разъ показываютъ **c**. Придя домой, я немедленно замѣчаю, что мои часы показываютъ **d**. По этимъ даннымъ легко опредѣлить искомое показаніе часовъ. Разность $d-a$ покажетъ время моего отсутствія изъ дому. Разность $c-b$ есть время, проведенное мною у знакомаго. Разность $(d-a)-(c-b)$, полученная отъ вычитанія второго времени изъ перваго, дастъ время, проведенное мною въ дорогѣ. Половина этого времени $\frac{b+d-a-c}{2}$ употреблено мною на обратную дорогу. Прибавивъ эту половину къ **c**, получимъ $\frac{b+c+d-a}{2}$; это и будетъ точное показаніе часовъ при моемъ возвращеніи домой.

Задача 47-я.

Возстановленіе записи.

При провѣркѣ памятной книжки умершаго фабриканта найдена была слѣдующая запись: «За продажу... кусковъ сукна, по 49 руб. 36 коп. каждый кусокъ, получено ...7 р. 28 коп.». Эта запись оказалась залитою въ нѣкоторыхъ мѣстахъ чернилами такъ, что нельзя было разобрать ни числа проданныхъ кусковъ, ни первыхъ трехъ цифръ полученной суммы. Спрашивается, можно ли по сохранившимся даннымъ узнать число проданныхъ кусковъ и всю вырученную сумму?

Рѣшеніе.

Задачу можно рѣшить двумя пріемами.

1) По условію, вся вырученная сумма, очевидно, не превышаетъ 10 000 руб. Значитъ, число проданныхъ кусковъ не болѣе 203.

Послѣдняя цифра неизвѣстнаго числа кусковъ должна быть такова, чтобы она, будучи умножена на 6, давала произведеніе, оканчивающееся на 3; такая цифра можетъ быть 3 или 8.

Положимъ, что послѣдняя цифра неизвѣстнаго числа кусковъ равна 3. Стоимость трехъ кусковъ равна 14 808 коп. Вычитая это число изъ вырученной суммы, мы должны получить число, оканчивающееся на 920.

Предполагая, что послѣдняя цифра равна 3, вторая отъ конца цифра можетъ быть или 2 или 7, такъ какъ только эти цифры, будучи умножены на 6, даютъ произведенія, оканчивающіяся на 2.

Положимъ, что неизвѣстное число оканчивается на 23. Вычитая стоимость 23 кусковъ изъ всей вырученной суммы, получимъ число, оканчивающееся на 200. Третья цифра можетъ быть или 2 или 7; но такъ какъ неизвѣстное число не превосходитъ 203, то наше предположеніе невозможно.

Если бы мы предположили, что неизвѣстное число оканчивается на 73, то третья цифра была бы равна 4 или 9; такое предположеніе опять невозможно.

Итакъ, посѣдняя цифра не можетъ быть 3; остается предположить, что она равна 8. Разсужденія, подобныя предыдущимъ, покажутъ намъ, что вторая цифра можетъ быть или 4, или 9; изъ этихъ двухъ предположеній возможно только второе.

Задача имѣетъ одно рѣшеніе: число проданныхъ кусковъ равно 98, вся вырученная сумма равна **4 837 р. 28 коп.**

2) Задачу можно также рѣшить *алгебраически*, что и предоставляемъ сдѣлать болѣе подготовленному читателю.

Задача 48-я.

За грибами.

Дѣдушка пошелъ съ 4-мя своими внучатами въ лѣсъ за грибами. Въ лѣсу разошлись въ разныя стороны и стали искать грибы. Черезъ полчаса дѣдушка сѣлъ подъ дерево отдохнуть и пересчиталъ свои грибы: ихъ оказалось 45 штукъ. Тутъ прибѣжали къ нему внучата, — всѣ съ пустыми руками: ни одинъ ничего не нашелъ.

— Дѣдушка!—проситъ одинъ внукъ:—дай мнѣ своихъ грибовъ, чтобы кузовокъ не былъ пустой. Авось съ твоей легкой руки много грибовъ наберу.

— И мнѣ, дѣдушка!

— И мнѣ дай!

Дѣдъ далъ каждому и роздалъ такимъ образомъ дѣтямъ всѣ свои грибы. Всѣ снова разбрелись въ разныя стороны, и случилось слѣдующее. Одинъ мальчикъ нашелъ еще 2 гриба, другой 2 потерялъ, третій нашелъ еще столько, сколько получилъ отъ дѣда, а четвертый потерялъ половину полученныхъ отъ дѣда. Когда дѣти пришли домой и подсчитали свои грибы, то оказалось у всѣхъ поровну.

Сколько каждый получилъ отъ дѣдушки грибовъ и сколько было у каждаго, когда они пришли домой?

Рѣшеніе.

Не трудно видѣть, что третьему внуку дѣдъ далъ грибовъ меньше всего, потому что третій внукъ долженъ былъ набрать еще столько же грибовъ, чтобы сравняться съ братьями. Для простоты скажемъ, что третьему внуку дѣдъ далъ грибовъ одну горсть.

Сколько же онъ далъ такихъ же горстей четвертому?

Третій внукъ принесъ домой 2 горсти, потому что самъ еще нашелъ столько же грибовъ, сколько далъ ему дѣдъ. Чет-

вертый внукъ принесъ домой ровно столько же грибовъ, сколько и третій: значитъ, тоже 2 горсти; но онъ половину своихъ грибовъ растерялъ по дорогѣ: стало быть, дѣдъ далъ ему 4 горсти.

Первый внукъ принесъ домой 2 горсти; но изъ нихъ 2 гриба онъ самъ нашелъ; значитъ, ему дѣдъ далъ 2 горсти безъ 2-хъ грибовъ. Второй внукъ принесъ домой 2 горсти, да по дорогѣ онъ потерялъ 2 гриба; стало быть дѣдъ, далъ ему 2 горсти, да еще два гриба.

Итакъ, дѣдъ роздалъ внукамъ 1 горсть, да 4 горсти, да 2 горсти безъ 2-хъ грибовъ, да 2 горсти съ 2-мя грибами, и того 9 полныхъ горстей (въ 2-хъ горстяхъ не хватало 2-хъ грибовъ, зато въ 2-хъ другихъ горстяхъ были лишніе 2 гриба). Въ 9 равныхъ горстяхъ было 45 грибовъ; значитъ въ каждой горсти $45 : 9 = 5$ грибовъ.

Третьему внуку дѣдъ далъ 1 горсть, т.-е. 5 грибовъ; четвертому 4 горсти, т.-е. $5 \times 4 = 20$ грибовъ; первому 2 горсти безъ 2-хъ грибовъ, т.-е. $(5 \times 2) - 2 = 8$ грибовъ; второму 2 горсти съ 2-мя грибами, т.-е. $(5 \times 2) + 2 = 12$ грибовъ.

Задача 49-я.

Находка.

Четверо крестьянъ: Сидоръ, Карпъ, Пахомъ и Фока, возвращались изъ города и говорили, что ничего не заработали.

— Эхъ! — сказалъ Сидоръ, — если бы мнѣ найти кошель съ деньгами, я бы взялъ себѣ только третью часть, а остальныя съ кошелемъ даже отдалъ бы вамъ.

— А я, — молвилъ Карпъ, — подѣлилъ бы между всѣми нами поровну.

— Я доволенъ былъ бы пятой всего частью,—отозвался Пахомъ.

— Съ меня же довольно бы и шестой части, — сказалъ Фока. — Да что толковать... Статочное ли

дѣло,—деньги на дорогѣ найти! Кто это ихъ для насъ броситъ?..

Вдругъ и на самомъ дѣлѣ видятъ на дорогѣ кошелекъ. Подняли его и порѣшили подѣлить деньги такъ, какъ каждый только что говорилъ: т. е. Сидоръ получитъ треть, Карпъ — четверть, Пахомъ — пятую, а Фока—шестую часть найденныхъ денегъ.

Открыли кошелекъ и нашли въ немъ 8 кредитныхъ билетовъ: одинъ въ 3 руб., а остальные рублевые, пятирублевые и десятирублевые. Но ни одинъ крестьянинъ не могъ взять своей части безъ размѣна. Поэтому рѣшили ждать, не размѣняетъ ли кто изъ проѣзжихъ. Скачетъ верховой; крестьяне останавливаютъ его:

— Такъ и такъ,—разсказываютъ они:—нашли кошелекъ съ деньгами; деньги хотимъ раздѣлить такъ-то. Будь такой добрый, размѣняй намъ рубль!

— Рубля я вамъ не размѣняю, а давайте мнѣ кошелекъ съ деньгами: я положу туда свою рублевку и изъ всѣхъ денегъ выдамъ каждому его долю, а кошелекъ мнѣ.

Крестьяне съ радостью согласились. Верховой сложилъ всѣ деньги вмѣстѣ, выдалъ первому $^1/_3$, второму $^1/_4$, третьему $^1/_5$, четвертому $^1/_6$ всѣхъ денегъ, а кошелекъ спряталъ къ себѣ за пазуху.

— Ну, спасибо вамъ, братцы, большое: и вамъ хорошо и мнѣ хорошо!—и ускакалъ.

Задумались мужики:

— За что же онъ насъ поблагодарилъ?

— Ребята, сколько у насъ всего бумажекъ?—спросилъ Карпъ.

Сосчитали,—оказалось 8.

— А гдѣ же трехрублевка? У кого она?

— Ни у кого нѣтъ!

— Какъ же такъ, ребята? верховой-то, значитъ, надулъ насъ? Давай считать, на сколько онъ обидѣлъ каждаго...

Прикинули въ умѣ.

— Нѣтъ, братцы, я получилъ больше, чѣмъ мнѣ слѣдовало!—сказалъ Сидоръ.

— И я получилъ на четвертакъ больше,—сказалъ Карпъ.

— Какъ же такъ? всѣмъ далъ больше, чѣмъ нужно, а трехрублевку увезъ! Должно быть, это лѣшій! ишь ты, какъ ловко насъ обошелъ!—рѣшили крестьяне.

Сколько денегъ нашли крестьяне? Обманулъ ли ихъ верховой? Какія бумажки далъ онъ каждому?

Рѣшеніе.

Крестьяне не умѣли правильно сложить дробей. Въ самомъ дѣлѣ, сложите всѣ части, на которыя крестьяне хотѣли подѣлить находку: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}$. Значитъ, они всѣ вмѣстѣ хотѣли получить меньше, чѣмъ нашли (нашли они $\frac{60}{60}$). Найденныя деньги вмѣстѣ съ деньгами верхового были раздѣлены на 60 частей; изъ нихъ $\frac{57}{60}$ отданы крестьянамъ, а $\frac{3}{60}$ или $\frac{1}{20}$, остались у верхового. Но мы знаемъ, что у верхового осталось 3 рубля. Значитъ $\frac{1}{20}$ всѣхъ денегъ составляетъ 3 рубля; слѣдовательно, всѣхъ денегъ было $3 \times 20 = 60$ руб. Карпъ получилъ изъ этихъ денегъ $^1/_4$ часть, т.-е. 15 руб.; но, если бы верховой не приложилъ своихъ денегъ, Карпъ долженъ былъ бы получить на четвертакъ меньше, т.-е. 15 р. — 25 к. = 14 р. 75 к.: такова $^1/_4$ часть найденныхъ денегъ. Отсюда заключаемъ, что найдено было 14 р. 75 к. $\times$ 4 = 59 р. Съ деньгами верхового стало 60 р.: значитъ верховой приложилъ 1 рубль. Приложилъ онъ рубль, а увезъ 3 рубля: 2 рубля выгадалъ себѣ за умный дѣлежъ.

Какія же кредитки были найдены въ кошелькѣ?

Пять бумажекъ по 10 р., одна въ 5, одна въ 3 и одна въ 1 рубль. Сидору верховой далъ 20 рублей: 2 десятирублевки; Карпу—15 р., десятирублевку и пятирублевку; Пахому—12 руб. десятирублевку и двѣ рублевки (одну — найденную, другую — свою); Фокѣ—послѣднюю десятирублевку, а трехрублевку взялъ себѣ.





Переправы.

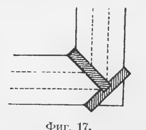
Задача 50-я.

Черезъ ровъ.

Четыреугольное поле окружено рвомъ, ширина котораго всюду одинакова. Даны двѣ доски, длина которыхъ равна точно ширинѣ рва, и требуется съ помощью этихъ досокъ устроить переходъ черезъ ровъ.

Рѣшеніе.

Стоитъ взглянуть на прилагаемый здѣсь рисунокъ (фиг. 17), чтобы понять, какъ рѣшается задача.



Фиг. 17.

Что касается математическаго доказательства возможности подобной переправы, то оно слѣдуетъ изъ неравенства

$$2\sqrt{2} < 3,$$

и дѣлается очевиднымъ, если принять ширину рва равной *тремъ* какимъ-либо единицамъ.

Задача 51-я.

Отрядъ солдатъ.

Отрядъ солдатъ подходитъ къ рѣкѣ, черезъ которую необходимо переправиться. Но мостъ сломанъ, а рѣка глубока. Какъ быть? Вдругъ капитанъ замѣчаетъ у берега двухъ мальчиковъ, которые забавляются въ лодкѣ. Но эта послѣдняя такъ мала, что на ней можетъ переправиться только одинъ солдатъ, или только двое мальчиковъ,—не больше! Однако всѣ солдаты переправились черезъ рѣку именно на этой лодкѣ. Какъ это было сдѣлано?

Рѣшеніе.

Дѣти переѣхали рѣку. Одинъ изъ мальчиковъ остался на берегу, а другой пригналъ лодку къ солдатамъ и вылѣзъ. Тогда сѣлъ солдатъ и переправился на другой берегъ. Мальчикъ, оставшійся тамъ, пригналъ обратно лодку къ солдатамъ, взялъ своего товарища мальчика, отвезъ на другой берегъ и снова доставилъ лодку обратно, послѣ чего вылѣзъ, а въ нее сѣлъ другой солдатъ и переправился...

Такимъ образомъ—послѣ каждыхъ двухъ перегоновъ лодки черезъ рѣку и обратно — переправлялся одинъ солдатъ. Такъ повторялось столько разъ, сколько было солдатъ и офицеровъ.

Задача 52-я.

Волкъ, коза и капуста.

Крестьянину нужно перевезти черезъ рѣку волка, козу и капусту. Но лодка такова, что въ ней можетъ помѣститься только крестьянинъ, а съ нимъ или одинъ волкъ, или одна коза, или одна капуста. Но если оставить волка съ козой, то волкъ съѣстъ козу, а если оставить козу съ капустой, то коза съѣстъ капусту. Какъ перевезъ свой грузъ крестьянинъ?

Рѣшеніе.

Ясно, что приходится начать съ козы. Крестьянинъ, перевезши козу, возвращается и беретъ волка, котораго перевозитъ на другой берегъ, гдѣ его и оставляетъ, но зато беретъ и везетъ обратно на первый берегъ козу. Здѣсь онъ оставляетъ ее и перевозитъ къ волку капусту. Вслѣдъ затѣмъ, возвратившись, онъ перевозитъ козу; и переправа оканчивается благополучно.

Задача 53-я.

Мужья и жены.

Три мужа со своими женами желаютъ переправиться съ одного берега рѣки на другой, но въ ихъ распоряженіи есть лодка безъ гребца, поднимающая только двухъ человѣкъ. Дѣло осложняется еще тѣмъ, что ни одинъ мужъ не желаетъ, чтобы его жена находилась безъ него въ обществѣ одного или двухъ другихъ мужей. Какъ переправились при соблюденіи этихъ условій, всѣ шесть человѣкъ?

Рѣшеніе.

Задача эта имѣетъ за собой уже почтенную историческую давность, и рѣшеніе ея для классиковъ можетъ быть выражено слѣдующими латинскими стихами:

It duplex mulier, redit una vehitque manentem;
Itque una, utuntur tunc duo puppe viri.
Par vadit, redeunt bini; mulierque sororem
Advehit; ad propriam sive maritus vadit.

Обозначимъ большими буквами **А, Б** и **В** мужей, а ихъ женъ соотвѣтственно малыми буквами **а, б** и **в.** Имѣемъ въ началѣ:

Первый берегъ.			Второй берегъ.		
В	**Б**	**А**	.	.	.
в	**б**	**а**	.	.	.

I.—Сначала отправляются двѣ женщины.

В	Б	А	|	.	.	.
в	.	.	|	.	б	а

II.—Возвращается одна изъ женщинъ и перевозитъ третью.

В	Б	А	|	.	.	.
.	.	.	|	в	б	а

III.—Возвращается одна изъ женщинъ и остается со своимъ мужемъ. Два другихъ мужа отправляются къ своимъ женамъ.

В	.	.	|	.	Б	А
в	.	.	|	.	б	а

IV.—Одинъ изъ мужей возвращается со своей женой, оставляетъ ее и забираетъ съ собой мужа.

.	.	.	|	В	Б	А
в	б	.	|	.	.	а

V.—Женщина переѣзжаетъ и забираетъ одну изъ женъ.

.	.	.	|	В	Б	А
в	.	.	|	.	б	а

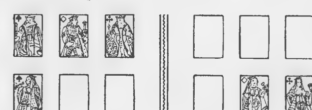
VI.—Мужъ (или одна изъ женъ) ѣдетъ обратно и перевозитъ оставшуюся.

.	.	.	|	В	Б	А
.	.	.	|	в	б	а

Очень наглядно и весело рѣшается эта же задача при помощи картъ.

Пусть три мужа будутъ короли пикъ, бубенъ и трефъ, а дамы соотвѣтствующихъ мастей будутъ ихъ жены. Сначала всѣ находятся на одномъ берегу рѣки. Но вотъ начинается переправа.

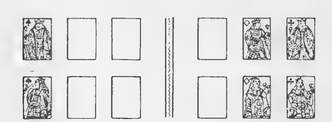
I. –Сначала отправляются двѣ дамы.



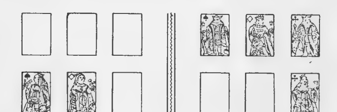
II.—Возвращается дама и перевозитъ третью.



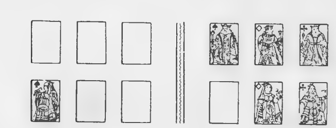
III.—Возвращается одна изъ дамъ, остается съ мужемъ, а два другихъ мужа переправляются къ своимъ женамъ.



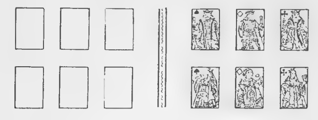
IV.—Мужъ съ женой возвращается на первый берегъ. Оставляетъ тамъ жену и забираетъ съ собой мужчину.



V.—Со второго берега ѣдетъ на первый дама и перевозитъ оттуда одну изъ подругъ.



VI.—Опять ѣдетъ на первый берегъ дама и перевозитъ оставшуюся тамъ подругу (или можетъ и самъ мужъ съѣздить за своей женой). И переправа окончена къ общему удовольствію.



Замѣчаніе.

Попробуйте ту же задачу рѣшить для случая четырехъ королей и дамъ. Вы увидите, что если лодка не вмѣщаетъ болѣе двухъ лицъ, то переправа при соблюденіи всѣхъ указанныхъ условій невозмжна. Но если взять лодку, въ которой могутъ помѣститься *три* человѣка, то переправа можетъ быть совершена при соблюденіи указанныхъ условій,—т. е. ни одна дама не будетъ оставаться безъ своего мужа въ присутствіи другихъ мужчинъ.

Подобная переправа совершается *въ пять пріемовъ.*

Взявъ четыре короля и четыре дамы, попробуйте для даннаго случая рѣшить вопросъ. Это не трудно.

Но и на лодкѣ, поднимающей только двухъ человѣкъ, можно совершить переправу четырехъ мужей съ ихъ женами, если посреди рѣки есть островъ, на которомъ можно останавливаться. Рѣшимъ съ помощью картъ эту любопытную задачу.

Задача 54-я.

Четыре мужа съ ихъ женами должны переправиться черезъ рѣку на лодкѣ безъ гребца, которая не вмѣщаетъ болѣе двухъ человѣкъ. Посреди рѣки есть островъ, на которомъ можно высаживаться. Спрашивается, какъ совершить эту переправу такъ, чтобы ни одна жена не была въ обществѣ другихъ мужчинъ ни на берегахъ, ни на островѣ, ни въ лодкѣ, если нѣтъ налицо мужа.

Рѣшеніе.

Переправа совершается въ 12 переѣздовъ, какъ видимъ изъ нижеслѣдующаго:

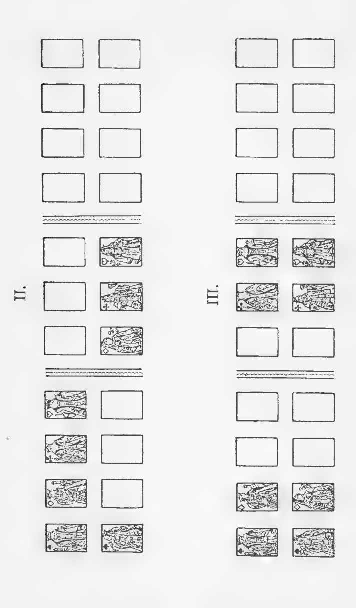
Беремъ четыре короля и четыре дамы. Условимся, гдѣ правый берегъ рѣки, гдѣ лѣвый, а между ними островъ:

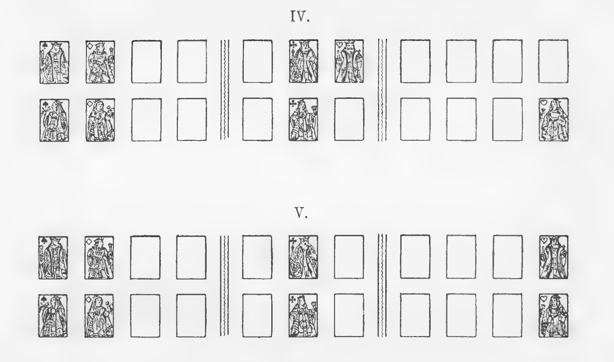
Лѣвый берегъ.

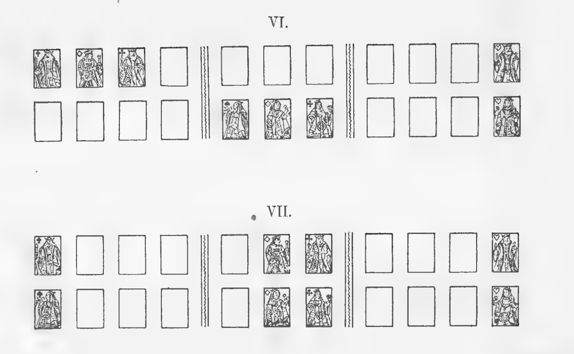
Островъ.

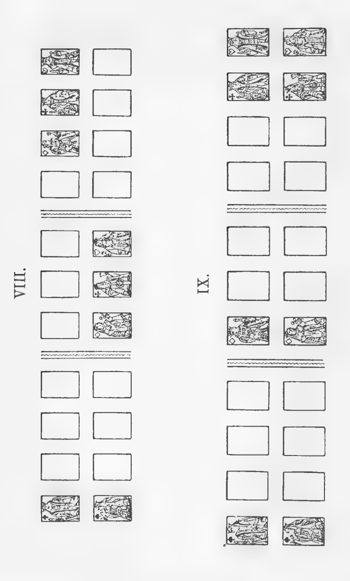
Правый берегъ.

I.


II.
III.


IV.
V.


VI.
VII.

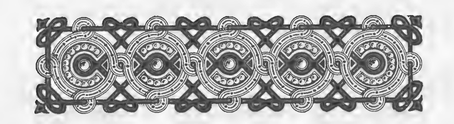

VIII.
IX.

X.

XI.

XII.





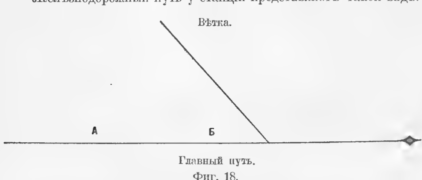
Задача 55-я.

На станціи желѣзной дороги.

Поѣздъ Б приближается къ станціи желѣзной дороги, но его нагоняетъ быстрѣе идущій поѣздъ А, который необходимо пропустить впередъ. У станціи отъ главнаго пути отходитъ боковая вѣточка, куда можно отвести на время вагоны съ главнаго пути, но вѣточка эта настолько короткая, что на ней не вмѣщается весь поѣздъ Б. Спрашивается, какъ все-таки пропустить поѣздъ А впередъ?

Рѣшеніе.

Желѣзнодорожный путь у станціи представляетъ такой видъ:



Главный путь.
Фиг. 18.

По главному пути, въ направленіи, означенномъ стрѣлкой, идутъ впередъ поѣздъ Б, а за нимъ поѣздъ А, который надо

пропустить впередъ, пользуясь боковою вѣточкой, на которой можетъ помѣститься лишь часть вагоновъ (фиг. 18).

Поѣздъ А нагналъ поѣздъ Б и долженъ пройти дальше. Какъ же быть? А вотъ какъ:

Поѣздъ Б идетъ по главному пути и переходитъ весь за начало боковой вѣтки. Затѣмъ поѣздъ Б идетъ заднимъ ходомъ на это отвѣтвленіе и оставляетъ тамъ столько вагоновъ, сколько умѣщается, а остальная часть поѣзда Б вмѣстѣ съ паровозомъ уходитъ опять впередъ, за начало вѣточки. Затѣмъ пропускаютъ поѣздъ А и, какъ только онъ весь пройдетъ за начало вѣтки, къ послѣднему его вагону прицѣпляютъ оставшіеся на вѣточкѣ вагоны поѣзда Б, и поѣздъ А сводитъ эту часть поѣзда Б съ вѣточки впередъ. Затѣмъ поѣздъ А пускаютъ назадъ,—влѣво отъ начала вѣточки,—и оставляютъ тамъ вагоны отъ поѣзда Б. Тою порою другая часть поѣзда Б (съ паровозомъ) идетъ заднимъ ходомъ и становится на вѣточку, открывая свободный путь для поѣзда А. Онъ мчится дальше, а паровозъ поѣзда Б съ нѣсколькими передними вагонами опять выходитъ на главный путь, прицѣпляетъ стоящую влѣво отъ начала вѣточки часть своего поѣзда и слѣдуетъ за поѣздомъ А.

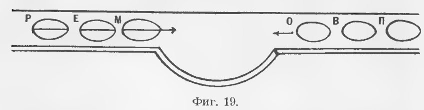
Задача 56-я.

Разъѣздъ 6-ти пароходовъ.

По каналу, одинъ за другимъ, идутъ 3 парохода: «Олегъ», «Владиміръ» и «Петръ». Навстрѣчу имъ показались еще 3 парохода, которые тоже идутъ одинъ за другимъ: «Марія», «Екатерина» и «Россія». Каналъ такой ширины, что два парохода въ немъ разъѣхаться не могутъ; но въ каналѣ съ одной его стороны есть заливъ, въ которомъ можетъ помѣститься только одинъ пароходъ. Могутъ ли пароходы разъѣхаться такъ, чтобы продолжать свой путь попрежнему?

Рѣшеніе.

Положеніе судовъ и каналъ съ заливомъ изображены на фиг. 19-ой.



Фиг. 19.

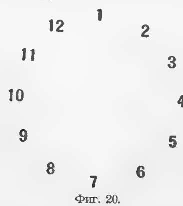
Пароходы «В.» и «П.» отходятъ назадъ (направо), а «Олегъ» входитъ въ заливъ; «М.», «Е.» и «Р.» проходятъ по каналу мимо «Олега»; тогда «Олегъ» выходитъ изъ залива и идетъ своей дорогой (влѣво); «Р.», «Е.» и «М.» отступаютъ на прежнее мѣсто (налѣво); тогда съ «Владиміромъ» повторяется все, что дѣлалось съ «Олегомъ». Такимъ же образомъ проходитъ и «Петръ», и пароходы плывутъ своей дорогой.

Задача 57-я.

Угадать число.

Числа, начиная отъ 1 и до любого предѣла, написаны и расположены въ послѣдовательномъ порядкѣ по кругу. Угадать любое изъ этихъ чиселъ, задуманное кѣмъ-либо.

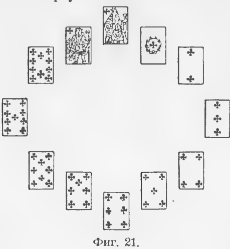
Возьмемъ, напр., числа отъ 1 до 12 и расположимъ ихъ по кругу (фиг. 20). Можно смѣло взяться угадать задуманное кѣмъ-либо въ этомъ кругѣ число.



Фиг. 20.

Можно, очевидно, для той же цѣли взять часы и предложить угадать задуманный кѣмъ-либо часъ.

Можно также взять двѣнадцать картъ какой-либо масти (отъ туза до дамы) и, считая валета за 11, а даму за 12, разложить ихъ, какъ указано на фиг. 21, и взяться угадать задуманную кѣмъ-либо карту.



Фиг. 21.

Можно также пользоваться домино, очками лото и т. д. Какъ же угадать задуманное число?

Рѣшеніе.

Пусть кто-либо задумаетъ про себя любое изъ чиселъ на кругѣ. Затѣмъ **укажите** ему сами **любое число** на этомъ кругѣ и прибавьте про себя къ этому числу 12 (т. е. наивысшее число круга). Вы получите нѣкоторое число, и это число вы скажете громко. Пусть потомъ задумавшій считаетъ про себя отъ задуманнаго имъ числа, притрогиваясь сначала къ указанному вами числу, а потомъ къ каждому слѣдующему числу по кругу, **идя въ обратномъ порядкѣ,** и пусть считаетъ до сказаннаго вами громко числа. Когда онъ досчитаетъ до него, послѣдовательно притрогиваясь къ числамъ, то остановится какъ разъ на задуманномъ имъ числѣ или часѣ, или картѣ.

Пусть, напримѣръ, кто либо задумалъ на кругѣ 5, а вы указываете, напримѣръ, 9, прибавляете къ нему про себя 12 и получаете 21. Затѣмъ говорите громко задумавшему:

— Считайте про себя начиная отъ задуманнаго вами числа до 21, но, начиная счетъ, притроньтесь сначала къ 9, потомъ къ 8, потомъ къ 7 и т. д., идя по кругу въ обратномъ порядкѣ; когда же досчитаете до 21, то скажите это число громко и остановитесь.

Задумавшій исполнитъ сказанное ему, и когда досчитаетъ до 21, то какъ разъ **самъ укажетъ задуманное имъ число 5.**

Можно обставить эту задачу еще таинственнѣе; напр. такъ:

Кто-нибудь задумываетъ какое-нибудь число (напр. 5). Вы берете, напр., число 9, прибавляете къ нему мысленно 12, получаете 21 и говорите задумавшему:

— Теперь я буду стучать карандашомъ (или пальцемъ) и при каждомъ стукѣ вы прибавляйте про себя къ задуманному вами числу по единицѣ. Но когда досчитаете до 21, скажите громко: «21».

Затѣмъ стучите по 9, по 8, по 7 и т. д. по 12, по 11 и т. д. Задумавшій число въ это время про себя будетъ считать 5, 6, 7 и т. д., но когда скажетъ громко «двадцать одинъ», то окажется, что вы стучите какъ разъ по задуманному имъ числу 5.

— Вы задумали число «пять!»—говорите вы ему.

— Совершенно вѣрно!—отвѣтитъ вамъ задумавшій, дивясь, какъ вы могли узнать это, если онъ самъ не знаетъ, въ чемъ разгадка этого будто бы фокуса.

«Фокуса» здѣсь, конечно, нѣтъ, а есть только самый правильный математическій расчетъ, состоящій въ слѣдующемъ:

Чтобы отъ 5 прійти къ 9, нужно считать такъ: 5, 6, 7, 8, 9. Значитъ, отъ 9 до 5 нужно пройти черезъ тѣ же числа 9, 8, 7, 6, 5, только считая ихъ въ обратномъ порядкѣ. Если, указывая на 9, мы скажемъ «пять», затѣмъ, указывая на 8, скажемъ «шесть», и т. д. то, придя къ задуманному числу 5, скажемъ «девять». Если затѣмъ идти по кругу въ томъ же направленіи и присчитать къ «девяти» еще 12 послѣдовательныхъ чиселъ круга, то опять приходимъ къ тому же числу 5. Дѣло сводится, слѣдовательно, къ счету по кругу въ обратномъ направленіи отъ указаннаго числа 9 до $9+12$, т. е. до 21.

Если, наоборотъ, задумано 9, а указано 5, то отъ 9 до 5,

считая въ прямомъ направленіи по кругу (по порядку возрастанія чиселъ), получаемъ: 9, 10, 11, 12. 12 + 1, 12 + 2, 12 + 3, 12 + 4, 12 + 5, т. е. 17. Слѣдовательно, начиная съ 5, можно прійти къ задуманному числу 9, идя въ обратномъ направленіи и отсчитывая тѣ же 5 + 12 = 17 чиселъ.

Дѣло простое, а развлеченіе получается интересное.

Задача 58-я.

„Кто первый скажетъ сто".

Двое поочередно говорятъ произвольныя числа, но не превышающія десяти. Эти числа складываются одно за другимъ, и выигрываетъ тотъ, кто первый достигнетъ **ста**. Сдѣлать такъ, чтобы всегда первымъ сказать **«сто»**.

Напередъ заданное число есть сто, а числа, которыя говорятъ играющіе, не превышаютъ десяти, т. е. можно называть 10 и всякое меньшее число. Итакъ, если первый скажетъ, напр., «7», а второй «10», получится «17»; затѣмъ первый говоритъ, напр., «5», получится «22»; второй говоритъ «8», получится «30» и т. д. Побѣдителемъ будетъ тотъ, кто первый получитъ «100».

Рѣшеніе.

Чтобы быть побѣдителемъ, старайтесь только о томъ, чтобы вамъ пришлось сказать число 89. Ясно, что, если вы скажете это число, то какое бы число (десять или меньше) ни прибавилъ вашъ противникъ, вы тотчасъ найдете соотвѣтственное число, добавивъ которое къ полученному противникомъ, вы получаете **сто** и выигрываете.

Но чтобы сумѣть всегда сказать «89», а потомъ, значитъ, и «100», постарайтесь разобраться въ слѣдующихъ очень нетрудныхъ разсужденіяхъ.

Начнемъ отнимать, сколько возможно, отъ ста по одиннадцати. Получимъ рядъ такихъ чиселъ:

89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1.

Или же, если напишемъ ихъ въ порядкѣ возростанія, то получимъ:

1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89.

Запомнить эти числа очень легко: стоитъ только взять предѣльное число, т. е. 10, и прибавить къ нему единицу—получится 11. Затѣмъ беремъ, это число и всѣ числа, составленныя умноженіемъ 11-ти на 2, на 3, на 4... на 8, — получимъ 11, 22, 32, 44, 55, 66, 77, 88. Увеличимъ каждое изъ этихъ чиселъ единицей и начнемъ единицей же рядъ. Получимъ опять-таки предыдущій написанный нами рядъ чиселъ:

1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89.

Ясно теперь, если вы скажете 1, то какое бы число (по условію не больше 10) ни сказалъ другой играющій, онъ не помѣшаетъ вамъ сказать 12; точно такъ же далѣе вы всегда можете сказать 23, а затѣмъ 34, 45. 56, 67, 78 и 89.

Когда вы скажете 89, то какое бы число (не больше 10) ни сказалъ вашъ соперникъ, вы говорите «сто» и выигрываете.

Отсюда видно также, что если оба играющіе знаютъ, въ чемъ дѣло, то выигрываетъ всегда тотъ, кто первый скажетъ «одинъ», т. е. кто начинаетъ игру.

Обобщеніе.

Предыдущую задачу можно предложить и въ такомъ общемъ видѣ:

Двое говорятъ поочередно произвольныя числа, не превышающія, однако, какого-либо напередъ условленнаго предѣла. Эти числа складываются одно за другимъ, и выигрываетъ тотъ, кто первый достигнетъ какого-либо **напередъ назначеннаго числа.** Сдѣлать такъ, чтобы всегда первымъ прійти къ этому впередъ назначенному числу.

Если вы хорошо усвоили себѣ рѣшеніе предыдущей задачи, то нетрудно видѣть, какъ надо поступать въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ.

Пусть, напр., назначенное число будетъ 120; предѣльное, какъ и выше. равно 10. Тогда, очевидно, нужно имѣть въ виду числа:

109, 98, 87, 76, 65, 54, 43, 32, 21, 10.

т. е. начиная съ 10, всѣ кратныя 11, увеличенныя на 10. Отсюда также видно, что знающій рѣшеніе этой задачи выигрываетъ всегда, если онъ начинаетъ.

Пусть еще, напр., напередъ заданное число будетъ 100, но предѣльное число есть не 10, а 8. Въ такомъ случаѣ нужно имѣть въ виду числа:

91, 82, 73, 64, 55, 46, 37, 28, 19, 10, 1.

т. е., начиная отъ единицы, всѣ числа кратныя 9 и увеличенныя единицей. И въ данномъ случаѣ знающій задачу всегда выигрываетъ, если онъ начинаетъ.

Но если принять за предѣльное число, напр., 9, то числа, которыя нужно имѣть въ виду, будутъ:

90, 80, 70. 60, 50, 40, 30, 20, 10.

И ясно, что начинающій здѣсь можетъ проиграть, если другому извѣстенъ секретъ, ибо какое бы число начинающій ни сказалъ, онъ не можетъ помѣшать другому назвать десять, 20 и т. д.—всѣ числа до 100.

Любопытная исторія.

Существуетъ разсказъ объ одномъ приключеніи довольно извѣстнаго историка древности Іосифа Флавія, жившаго въ I-мъ вѣкѣ по Рождествѣ Христовѣ и оставившаго описаніе Іудейской войны. Онъ былъ правителемъ одного города во время осады и взятія его римлянами. Преслѣдуемый разъяренными римскими солдатами, Флавій укрылся со своимъ отрядомъ въ одной пещерѣ. Но съ этой минуты ему начала угрожать чуть ли не худшая опасность отъ собственныхъ подчиненныхъ: іудеи, когда онъ предложилъ имъ сдаться римлянамъ, пришли въ страшную ярость и рѣшили лучше перебить другъ друга, чѣмъ подвергнуться позору плѣна.

Іосифъ пробовалъ отговаривать ихъ отъ этого ужаснаго рѣшенія, но напрасно. На всѣ его доводы они отвѣчали угрозами и хотѣли выполненіе своего намѣренія начать съ него. Тогда онъ прибѣгнулъ къ хитрости, чтобы спасти свою жизнь. Дѣлая видъ, что онъ подчиняется ихъ рѣшенію, Іосифъ воспользовался послѣдній разъ своей властью надъ ними и предложилъ слѣдующій планъ:

Во избѣжаніе безпорядка и свалки при убійствѣ другъ друга, слѣдуетъ-де стать имъ всѣмъ въ извѣстномъ порядкѣ и, начавъ счетъ съ одного конца, убивать такого-то по порядку (повѣствователь не указываетъ, какого именно) до тѣхъ поръ, пока останется только одинъ, который и убьетъ самъ себя. Всѣ согласились. Іосифъ разставилъ ихъ, и самъ сталъ такимъ образомъ, что остался послѣднимъ, и, конечно, себя не убилъ, а пожалуй—спасъ еще нѣсколько человѣкъ, болѣе хладнокровныхъ и обѣщавшихъ ему полное повиновеніе.

«Вотъ замѣчательная исторія (говоритъ по этому поводу Баше де Мезирьякъ въ своей книгѣ, вышедшей въ 17-мъ столѣтіи и посвященной математическимъ развлеченіямъ), изъ которой мы видимъ, что не слѣдуетъ пренебрегать даже маленькими тонкостями, изощряющими умъ. Онѣ могутъ подготовить человѣка къ болѣе важнымъ дѣламъ и принести иногда неожиданную пользу»...

Очень можетъ быть, что приведенный выше разсказъ и послужилъ матеріаломъ, на которомъ создалась одна любопытная задача, гдѣ дѣло идетъ уже о христіанахъ и туркахъ. Видно, что сложилась она еще въ ту пору, когда Европа вела съ турками упорную войну.

Приводимъ эту задачу:

Задача 59.

По жребію.

15 турокъ и 15 христіанъ плыли по морю на небольшомъ суднѣ. Вдругъ поднялась страшная буря, и кормчій сказалъ, что для спасенія хотя половины людей остальныхъ 15 необходимо сбросить въ воду. Находящіеся на суднѣ предоставили дѣло жребію;

они стали всѣ въ рядъ и рѣшили, считая по порядку отъ 1 до 9, бросать въ воду каждаго девятаго до тѣхъ поръ, пока останется на кораблѣ только 15 человѣкъ. Нашелся христіанинъ, который разставилъ всѣхъ такъ, что въ воду попали всѣ 15 турокъ, а христіане остались на суднѣ. Какъ онъ это сдѣлалъ?

Рѣшеніе.

Для рѣшенія задачи нужно пассажировъ поставить такъ: **4** христіанина, **5** турокъ. **2** христіанина, **1** турокъ, **3** христіанина, **1** турокъ, **1** христіанинъ, **2** турка, **2** христіанина, **3** турка, **1** христіанинъ, **2** турка, **2** христіанина, **1** турокъ.

Чтобы запомнить эти числа и быстро рѣшить задачу, рекомендуемъ запомнить такое выраженіе:

„Отъ бурь есть защита,
Спасенье, избавленье намъ!“

И запомнить также порядокъ (что не трудно) гласныхъ въ азбукѣ: **а**, **е**, **и**, **о**, **у**; изъ нихъ первая **а** пусть означаетъ **1**, вторая **е**—**2**, третья **и**—**3**, четвертая **о**—**4** и пятая **у**—**5**.

Рядъ **начинается христіанами.** Вы говорите про себя **«отъ»**—и ставите 4-хъ христіанъ, **«бурь»** и ставите 5 турокъ, **«есть»**—и ставите 2-хъ христіанъ, **«за»**—и ставите 1-го турка, **«щи»**—и ставите 3-хъ христіанъ, **«та»**—и ставите одного турка, **«спа»**—и ставите 1-го христіанина, **«се»**—и ставите 2-хъ турокъ, **«нье»**—и ставите 2-хъ христіанъ, **«из»**—и ставите 3-хъ турокъ, **«ба»**— и ставите 1-го христіанина, **«вле»**—и ставите 2-хъ турокъ, **«нье»**—и ставите 2-хъ христіанъ, **«намъ»**—и ставите 1-го турка.

Запомнить рѣшеніе, какъ видно, не трудно. А какъ найти его? Сейчасъ увидимъ, что и это не представляетъ особой трудности.

Поставимъ въ рядъ тридцать предметовъ, напр., спичекъ, или палочекъ, или камешковъ, или кубиковъ и т. д.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Считая отъ 1 до 9, находимъ, что въ первый разъ придется выбросить 9-ю, 18-ю и 27-ю палочки. Отбрасываемъ ихъ и опять начинаемъ считать далѣе отъ 1 до 9; сначала сосчитываемъ три палочки за 27-й, а затѣмъ возвращаемся къ началу ряда, который содержитъ теперь только 27 палочекъ. Изъ него придется, значитъ, на этотъ разъ выбросить 6-ю, 15-ю и 24-ю палочки. Отбросимъ эти палочки и, поступая по предыдущему, въ полученномъ новомъ ряду изъ 24-хъ палочекъ опять отбрасываемъ 6-ю, 15-ю и 24-ю палочки. Послѣ этого получаемъ рядъ изъ 21 палочки. Считая отъ 1 до 9-ти, здѣсь мы должны отбросить 9-ю и 18-ю. Останется 19 палочекъ. Считая далѣе три палочки за 18-й и возвращаясь къ началу, отбрасываемъ отсюда 6-ю и 15-ю. Останется рядъ изъ 17 палочекъ, изъ котораго, считая по предыдущему отъ 1 до 9, надо выбросить 5-ю и 14-ю палочки, и останется 15 палочекъ. Если разсмотрѣть затѣмъ, на какихъ мѣстахъ въ первоначальномъ ряду палочки остались (христіане) и на какихъ выброшены (турки), то, замѣняя выброшенныя палочки нулями, получимъ:

||||00000||0|||0|00||000|00||0.

Т. е. получается данное уже нами рѣшеніе задачи.

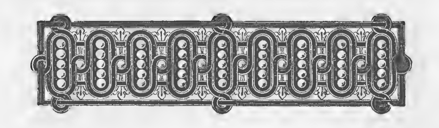
Вмѣсто палочекъ или спичекъ можно для данной задачи пользоваться картами, условившись, наприм., что красныя масти обозначаютъ христіанъ, а черныя—турокъ и т. д.

Задачу, конечно, можно видоизмѣнять всячески. Въ общемъ видѣ ее можно выразить такъ:

Дано нѣкоторое число различныхъ предметовъ. Расположить ихъ въ такомъ порядкѣ, чтобы послѣ отбрасыванія послѣдовательно пятаго, девятаго, десятаго или какого угодно по порядку предмета (до извѣстнаго предѣла, конечно), оставались напередъ заданные предметы.

Какъ можно рѣшить подобную задачу, ясно изъ разобранной выше задачи «по жребію».





Игра въ красное и черное или игра въ жетоны.

Разсказываютъ, что знаменитый англійскій ученый Тэтъ, путешествуя по желѣзной дорогѣ, развлекался, между прочимъ, слѣдующей интересной игрой. Онъ вынималъ изъ кармана 4 золотыхъ монеты и 4 серебряныхъ; затѣмъ клалъ ихъ въ рядъ въ перемѣнномъ порядкѣ, т. е. золотую монету и серебряную, золотую и серебряную и т. д., пока не раскладывалъ всѣ восемь монетъ, оставя слѣва такое свободное мѣсто, на которомъ могли бы умѣститься еще двѣ монеты—не болѣе. Вслѣдъ затѣмъ онъ задавалъ себѣ такую задачу:

Перемѣщать только двѣ **рядомъ** лежащія монеты, не измѣняя ихъ взаимнаго расположенія и пользуясь для этого свободнымъ мѣстомъ для двухъ монетъ, такъ, чтобы послѣ **четырехъ** всего такихъ перемѣщеній оказались рядомъ четыре золотыхъ монеты, а за ними слѣдовали четыре серебряныхъ.

Попробуйте сдѣлать это! Если у васъ нѣтъ, что очень можетъ быть, золотыхъ и серебряныхъ монетъ, то, быть можетъ, найдутся серебряныя и мѣдныя... Сущность задачи вѣдь отъ этого не мѣняется! Или, быть можетъ, у васъ совсѣмъ нѣтъ монетъ,—да еще цѣлыхъ восьми? Тогда ничто не мѣшаетъ вамъ воспользоваться черными и бѣлыми шашками, взявъ ихъ по четыре. А если нѣтъ и шашекъ, то ничто не помѣшаетъ вамъ

сдѣлать 4 кружочка (жетона) черныхъ и 4 красныхъ или бѣлыхъ изъ бумаги, картона или дерева и попытаться рѣшить предложенную задачу. Возьмите, наконецъ, 4 красныхъ и 4 черныхъ карты.

При всей своей видимой простотѣ, задача эта не такъ-то легка, особенно если увеличивать число паръ монетъ, жетоновъ, кружочковъ или картъ, т. е. если вмѣсто 8-ми взять ихъ 10, 12, 14 и т. д.

Карты,—настоящія или игрушечныя, все равно,—весьма пригодны для даннаго развлеченія. Назовемъ это развлеченіе **игрой въ красное и черное** и начнемъ съ такой задачи:

Задача 60-я.

Четыре пары.

Взяты 4 красныхъ и 4 черныхъ карты (или 4 красныхъ и 4 черныхъ кружка) и положены въ рядъ въ перемѣнномъ порядкѣ: красная, черная, красная, черная и т. д. Можно пользоваться свободнымъ мѣстомъ только для двухъ картъ и можно на это свободное мѣсто перемѣщать только двѣ рядомъ лежащія карты, не мѣняя порядка, въ которомъ онѣ лежатъ. Требуется въ **четыре** перемѣщенія картъ попарно перемѣстить ихъ такъ, чтобы оказались подрядъ четыре черныхъ и затѣмъ четыре красныхъ карты (Помните, что всюду вмѣсто картъ можно брать разнаго цвѣта кружки или жетоны, или монеты и т. д.).

Рѣшеніе.

Возьмемъ изъ колоды четыре короля и четыре дамы и расположимъ ихъ, какъ требуется, т. е. такъ:



Первое перемѣщеніе.—Слѣва имѣемъ два свободныхъ мѣста; перекладываемъ туда короля пикъ и бубенъ. Получается такое расположеніе:



Второе перемѣщеніе.—Даму червей и даму пикъ перекладываемъ на освободившіяся мѣста и получаемъ:





Третье перемѣщеніе.—Короля и даму бубенъ перекладываемъ на свободныя мѣста, получаемъ расположеніе:





Четвертое перемѣщеніе.—Наконецъ, перекладываемъ на свободныя мѣста даму пикъ съ королемъ трефъ и получаемъ требуемое расположеніе: идутъ подрядъ четыре черныхъ и четыре красныхъ карты.



Изъ этого послѣдняго расположенія картъ, наоборотъ, можно перейти къ первому также четырьмя перемѣщеніями.

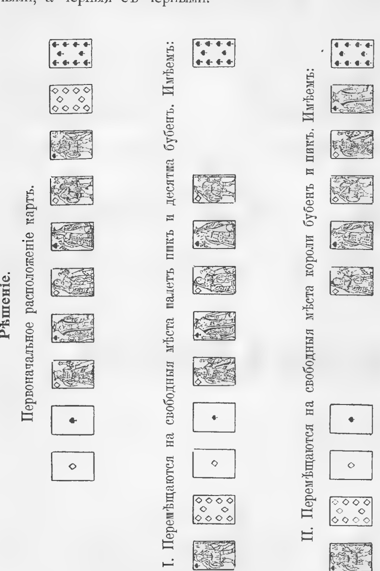
Рѣшите эту обратную задачу. Теперь это не трудно!

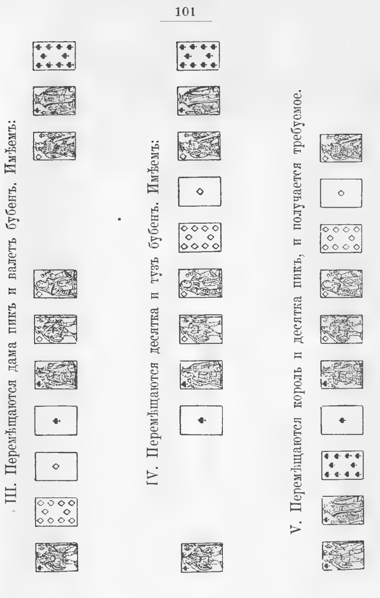
Задача 61-я.

Пять паръ.

Кладутъ въ рядъ пять красныхъ и пять черныхъ картъ въ перемѣнномъ порядкѣ: красная, черная, красная, черная и т. д.

Требуется, пользуясь двумя свободными мѣстами и перемѣщая на нихъ по двѣ карты безъ измѣненія ихъ взаимнаго положенія, въ **пять** перемѣщеній расположить ихъ такъ, чтобы красныя карты были съ красными, а черныя съ черными.



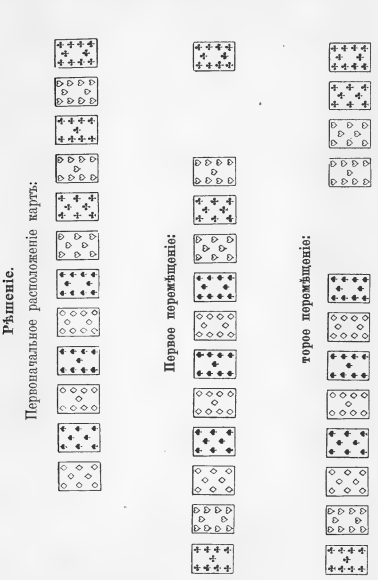


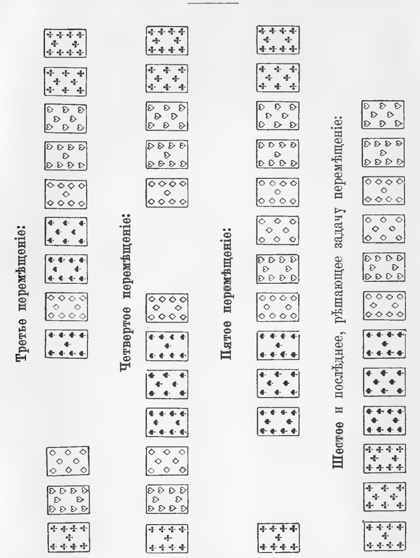
Задача 62-я.

Шесть паръ.

Положены въ рядъ въ перемѣнномъ порядкѣ шесть красныхъ и шесть черныхъ картъ: красная, черная, красная, черная и т. д. Пользуясь двумя свободными

мѣстами, требуется, передвигая каждый разъ только по 2 карты безъ измѣненія ихъ взаимнаго положенія, въ **шесть** перемѣщеній расположить черныя карты съ черными, а красныя съ красными.





Задача 63-я.

Семь паръ.

Кладутъ въ рядъ 7 красныхъ и 7 черныхъ картъ въ перемѣнномъ порядкѣ: красная, черная, красная, черная и т. д. Пользуясь свободнымъ мѣстомъ для двухъ картъ, требуется, передвигая каждый разъ только

по 2 карты безъ измѣненія ихъ взаимнаго положенія, въ **семь** перемѣщеній расположить черныя карты съ черными, а красныя съ красными.

Рѣшеніе.

Какъ это сдѣлать, вполнѣ объясняется прилагаемыми рисунками.

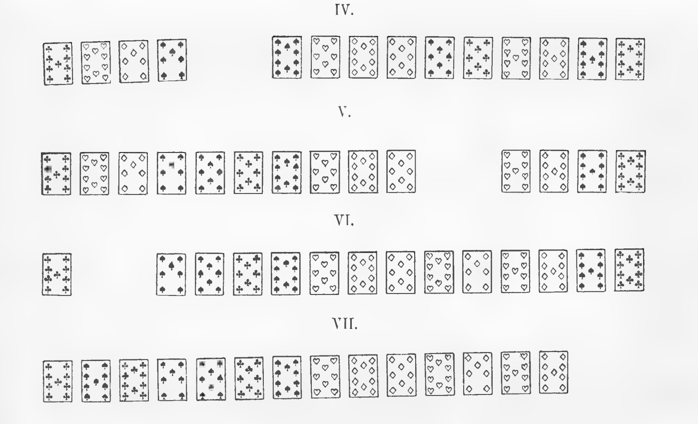
Первоначальное расположеніе картъ:

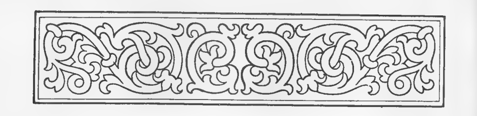
Перемѣщенія:

I.

II.

III.


IV.
V.
VI.
VII.



Задача 64-я.

Обманутый хозяинъ.

Слѣдующая задача объ обманутомъ хозяинѣ и воришкѣ-слугѣ сопровождается математическимъ доказательствомъ. Кому не охота разбираться въ этомъ доказальствѣ, или кто не можетъ этого сдѣлать,—пусть пока смѣло опускаетъ его. Но въ самой задачѣ, какъ и въ слѣдующей, совѣтуемъ разобраться и придумать еще подобныя же задачи.

Хозяинъ устроилъ въ своемъ погребѣ шкафъ въ формѣ квадрата съ 9-ю отдѣленіями. Среднее (внутри) отдѣленіе онъ оставилъ свободнымъ для пустыхъ бутылокъ, а въ остальныхъ расположилъ 60 бутылокъ вина такъ, что въ каждомъ угловомъ отдѣленіи ихъ было по 6, а въ каждомъ изъ среднихъ по 9. Такимъ образомъ, на каждой сторонѣ квадрата было по 21 бутылкѣ. Слуга подмѣтилъ, что хозяинъ провѣряетъ число бутылокъ только такъ, что считаетъ бутылки по сторонамъ квадрата и наблюдаетъ только за тѣмъ, чтобы на каждой сторонѣ квадрата было по 21 бутылкѣ. Тогда слуга унесъ сначала четыре бутылки, а остальныя разставилъ такъ, что вновь получилось по 21 на каждой сторонѣ. Хозяинъ пересчиталъ бутылки своимъ обычнымъ способомъ и подумалъ, что бутылокъ

остается то же число, и что слуга только переставилъ ихъ. Слуга воспользовался оплошностью хозяина и снова унесъ 4 бутылки, разставивъ остальныя такъ, что на каждой сторонѣ квадрата выходило опять по 21 бутылкѣ. Такъ онъ повторялъ, пока было возможно. Спрашивается, сколько разъ онъ бралъ бутылки, и сколько всего бутылокъ онъ унесъ?

Рѣшеніе.

Слуга бралъ себѣ по бутылкѣ изъ каждаго средняго отдѣленія и изъ тѣхъ же отдѣленій, чтобы обмануть хозяина, послѣ каждаго воровства прибавлялъ по бутылкѣ въ угловыя отдѣленія. Такъ онъ воровалъ 4 раза по 4 бутылки, а всего, значитъ, унесъ 16 бутылокъ. Все это очевидно изъ нижеслѣдующаго (фиг. 22):

Первоначальное расположеніе бутылокъ.

6	9	6
9		9
6	9	6

1-я кража.

7	7	7
7		7
7	7	7

2-я кража.

8	5	8
5		5
8	5	8

3-я кража.

9	3	9
3		3
9	3	9

4-я кража.

10	1	10
1		1
10	1	10

Фиг. 22.

Замѣчаніе. Математически вопросъ рязъясняется такъ:

Обозначаемъ черезъ **a** число бутылокъ въ каждой угловой клѣткѣ (въ нашемъ случаѣ $a = 6$) и черезъ **b** число бутылокъ

въ каждой изъ среднихъ клѣтокъ (въ нашемъ случаѣ $b=9$). Тогда, очевидно, число всѣхъ бутылокъ есть $4(a+b)$, или это же число можно написать такъ:

$$2(a+b+a)+2b.$$

Итакъ, если сдѣлать такъ, чтобы сумма $a+b+a$ оставалась постоянной, то число бутылокъ будетъ уменьшаться съ уменьшеніемъ b; и если b уменьшится на два, то общее число бутылокъ уменьшится на 4. Слѣдовательно, всякій разъ, какъ слуга бралъ по 2 бутылки изъ каждой средней клѣтки, что составляло 8 бутылокъ,—онъ ставилъ по одной бутылкѣ въ каждую изъ угловыхъ клѣтокъ, а 4 остальныхъ бутылки уносилъ. Въ каждой изъ среднихъ клѣтокъ было первоначально 9 бутылокъ. Слѣдовательно, подобныя операціи слуга могъ произвести 4 раза и унести всего 16 бутылокъ.

Мы предположили, что, таская бутылки, недобросовѣстный слуга сохранялъ, все же, симметрію первоначальнаго распредѣленія бутылокъ. Но можно предположить и какое угодно несимметричное распредѣленіе бутылокъ, лишь бы число ихъ S, считая по каждой сторонѣ квадрата, оставалось безъ измѣненія. Пусть, въ самомъ дѣлѣ, числа бутылокъ въ угловыхъ клѣткахъ будутъ m, n, p, q (фиг. 19). Тогда число всѣхъ бутылокъ есть

$$4S-(m+n+p+q).$$

Эта сумма уменьшится, если увеличится $m+n+p+q$, но S остается постояннымъ. Напр. отнимемъ отъ f и k по x бутылокъ, т. е. всего $2x$ бутылокъ. Если теперь x прибавить къ m, то S не измѣнится, и въ то же время число всѣхъ бутылокъ будетъ уменьшено на x. То же самое получится, если взять по x бутылокъ отъ f и g и прибавить x бутылокъ къ n и т. д.

m	f	n
k		g
p	h	q

Фиг. 23.

Точно также, если отнять по x отъ каждаго изъ чиселъ f, g, h, k и прибавить по x къ m и q, или къ n и p, или по $\frac{x}{2}$ къ каждому изъ чиселъ m, n, p и q, то S не измѣнится, и въ то же время число всѣхъ бутылокъ уменьшится на $2x$. Итакъ, можно по желанію уменьшать число бутылокъ на 1, 2, 3, 4 и т. д.

Задача 65-я.

Слѣпая хозяйка.

Служанки находятся въ восьми комнаткахъ, которыя расположены такъ: 4 комнатки по угламъ квадратнаго дортуара, а 4 остальныхъ въ серединѣ каждой стороны. Слѣпая хозяйка провѣряетъ число служанокъ, находящихся въ трехъ комнатахъ каждой стороны дортуара, и находитъ всюду 9 служанокъ. Черезъ нѣсколько времени она провѣряетъ, всѣ ли въ комнаткахъ. Считаетъ опять и находитъ въ каждомъ ряду комнатъ опять то же число служанокъ, несмотря на то, что къ нимъ пришли въ гости 4 подруги. Черезъ нѣсколько времени, опять тѣмъ же порядкомъ, что и раньше, хозяйка провѣрятъ число служанокъ и находитъ опять по 9 въ каждомъ ряду, хотя 4 служанки вышли вмѣстѣ съ 4-мя подругами. Какимъ образомъ служанки обманывали хозяйку?

Рѣшеніе.

Отвѣтъ легко видѣть изъ разсмотрѣнія слѣдующихъ фигуръ

1-е посѣщеніе хозяйки.

3	3	3
3		3
3	3	3

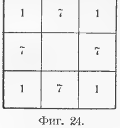
2-е посѣщеніе хозяйки.

2	5	2
5		5
2	5	2

3-е посѣщеніе хозяйки.

4	1	4
1		1
4	1	4

Можно допустить еще, что 4 служанки, возвратившись, каждая привела съ собой еще двухъ подругъ, а хозяйка, считая по своему, все же не замѣтила бы обмана, если бы всѣ расположились такъ (фиг. 24):



1	7	1
7		7
1	7	1

Фиг. 24.

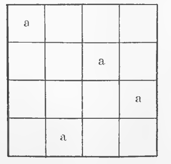
Задача 66-я.

Разстановка буквъ.

Въ квадратѣ, состоящемъ изъ 16 клѣтокъ, разставить четыре буквы такъ, чтобы въ каждомъ горизонтальномъ ряду, въ каждомъ вертикальномъ ряду и въ каждой діагонали встрѣчалась только одна буква. Какъ велико число рѣшеній этой задачи при одинаковыхъ и разныхъ буквахъ?

Рѣшеніе.

Прежде всего положимъ, что буквы одинаковы. Поставимъ одну букву въ какой-нибудь клѣткѣ первой діагонали. Съ этой



a			
		a	
			a
	a		

Фиг. 25.

клѣткою во второй діагонали есть одна клѣтка, стоящая съ ней въ томъ же горизонтальномъ ряду, и одна въ томъ же вертикальномъ ряду; въ одной изъ остальныхъ двухъ клѣтокъ второй діагонали можно поставить вторую букву. Далѣе, легко замѣтить, что двухъ буквъ, поставленныхъ на діагоналяхъ, вполнѣ достаточно, чтобы, сообразно условіямъ задачи, разставить двѣ остальныя буквы. Итакъ, если дано двѣ буквы въ одной діагонали, то задача имѣетъ два рѣшенія; но такъ какъ первую букву можно поставить въ какой угодно клѣткѣ первой діагонали, то задача имѣетъ $2 \times 4 = 8$ рѣшеній. Всѣ восемь рѣшеній получаются изъ одного поворачиваніемъ и переворачиваніемъ квадрата. Такъ какъ четыре различныхъ буквы можно перемѣщать 24-мя способами, то при четырехъ разныхъ буквахъ задача имѣетъ $8 \times 24 = 192$ рѣшенія.

Задача 67-я.

Данъ квадратъ, состоящій изъ 16 клѣтокъ. Требуется разставить въ клѣткахъ этого квадрата по четыре раза каждую изъ четырехъ буквъ a, b, c, d такимъ образомъ, чтобы въ каждомъ горизонтальномъ и вертикальномъ ряду и въ каждой діагонали не было одинаковыхъ буквъ. Какъ велико число рѣшеній этой задачи?

Рѣшеніе.

Прежде всего ясно, что буквы, стоящія въ угловыхъ клѣткахъ, должны быть различны. Поэтому поставимъ въ произвольномъ порядкѣ четыре буквы по угламъ.

a			b
c			d

Фиг. 26.

Въ среднихъ клѣткахъ діагонали, содержащей a и d, должны стоять буквы b и c, но онѣ могутъ быть поставлены въ одномъ или въ другомъ порядкѣ:

a			b
	b		
		c	
c			d

Фиг. 27.

a			b
	c		
		b	
c			d

Легко видѣть теперь, что разставленныхъ буквъ вполнѣ достаточно, чтобы сообразно даннымъ условіямъ разставить буквы въ остальныхъ клѣткахъ. Прежде всего разставимъ буквы въ крайнихъ горизонтальныхъ и вертикальныхъ рядахъ, а потомъ во второй діагонали. Такимъ образомъ получимъ:

a	c	d	b
d	b	a	c
b	d	c	a
c	a	b	d

Фиг. 28.

a	d	c	b
b	c	d	a
d	a	b	c
c	b	a	d

Итакъ, если разставлены буквы въ угловыхъ клѣткахъ, то задача имѣетъ два рѣшенія. Но такъ какъ четыре буквы можно перемѣщать 24-мя способами, то задача имѣетъ $24 \times 2 = 48$ рѣшеній.

Замѣтимъ здѣсь, что изъ одного найденнаго квадрата поворачиваніемъ и переворачиваніемъ его можно получить еще семь подобныхъ квадратовъ.

Если мы условимся считать всѣ квадраты, полученные поворачиваніемъ одного квадрата, за одно рѣшеніе, то при этомъ условіи задача имѣетъ $48 : 8 = 6$ рѣшеній.

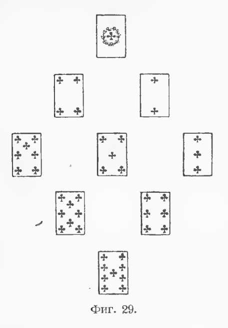
Задача 68-я.

Волшебный квадратъ изъ 9 клѣтокъ.

Расположить въ три ряда девять картъ, отъ туза (принимаемаго за 1) до девятки такъ, чтобы число очковъ каждаго ряда, считая справа налѣво (горизонтально), сверху внизъ (вертикально) и съ угла на уголъ (по діагоналямъ), было одинаково.

Рѣшеніе.

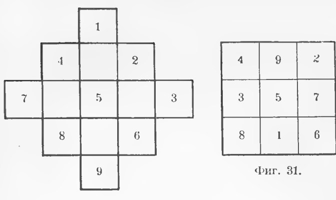
Расположимъ сначала карты такъ (фиг. 29):



Фиг. 29.

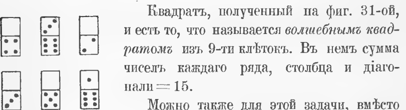
Вслѣдъ затѣмъ кладемъ на незанятыя мѣста: туза подъ пятеркой, девятку—надъ пятеркой, тройку—слѣва, а семерку—справа отъ той же пятерки и получимъ требуемое распредѣленіе картъ.

Если означимъ карты соотвѣтственными цифрами отъ 1 до 9, то это рѣшеніе изобразится такъ:



Фиг. 30.

Фиг. 31.

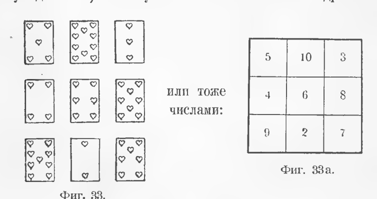


Фиг. 32.

Квадратъ, полученный на фиг. 31-ой, и есть то, что называется *волшебнымъ квадратомъ* изъ 9-ти клѣтокъ. Въ немъ сумма чиселъ каждаго ряда, столбца и діагонали = 15.

Можно также для этой задачи, вмѣсто картъ, взять соотвѣтствующія домино. Получимъ фиг. 32.

Если въ данномъ примѣрѣ съ картами замѣнить тузъ двойкой, двойку—тройкой, тройку — четверкой и т. д., наконецъ девятку—десяткой, то получимъ тоже волшебный квадратъ:



Фиг. 33.

или тоже числами:

Фиг. 33a.

Въ каждомъ ряду, столбцѣ и діагонали этого послѣдняго квадрата заключается 18 очковъ, или единицъ.

Задача 69-я.

Въ 25 клѣтокъ.

Расположить 25 чиселъ, начиная отъ 1 до 25, въ видѣ квадрата съ 25 клѣтками такъ, чтобы въ каждомъ вертикальномъ, въ каждомъ горизонтальномъ ряду и съ угла на уголъ (по обѣимъ діагоналямъ) получались одинаковыя суммы.

Рѣшеніе.

Строимъ квадратъ съ 25 клѣтками *ABCD* (фиг. 35), затѣмъ на всѣхъ его сторонахъ строимъ еще по 4 клѣтки, чтобы получилась фиг. 34-я. Вслѣдъ затѣмъ въ полученной фигурѣ располагаемъ косыми рядами числа въ послѣдовательномъ порядкѣ. какъ указано на фиг. 34-й. Перенеся, затѣмъ, числа, стоящія въ клѣткахъ внѣ квадрата *ABCD*, соотвѣтственно на расположенныя дальше отъ нихъ свободныя клѣтки въ тѣхъ же столбцахъ или рядахъ, получимъ требуемое (фиг. 35).

				1				
			6		2			
	A	11		7		3	B	
	16		12		8		4	
21		17		13		9		5
	22		18		14		10	
	C	23		19		15	*D*	
			24		20			
				25				

Фиг. 34.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Фиг. 35.

Задача 70-я.

Раскладка картъ.

Взято по четыре «старшихъ» карты каждой масти (тузъ, король, дама и валетъ каждой масти). Требуется эти шестнадцать картъ расположить въ видѣ четыреугольника такъ, чтобы въ каждомъ горизонтальномъ ряду, въ каждомъ вертикальномъ ряду и въ каждой діагонали находились въ какомъ-либо порядкѣ тузъ, король, дама, валетъ и притомъ разныхъ мастей.

Рѣшеніе.

Рѣшеніе изобразится такой таблицей:

Тузъ червей.	Король трефъ.	Дама бубенъ.	Валетъ пикъ.
Валетъ бубенъ.	Дама пикъ.	Король червей.	Тузъ трефъ.
Король пикъ.	Тузъ бубенъ.	Валетъ трефъ.	Дама червей.
Дама трефъ.	Валетъ червей.	Тузъ пикъ.	Король бубенъ.

Фиг. 36.

Придти къ этому рѣшенію можно путемъ слѣдующихъ разсужденій:

Обозначимъ черезъ A, B, C и D названія картъ независимо отъ ихъ мастей, а черезъ a, b, c, d ихъ масти. Задача сводится къ тому, чтобы въ 16 клѣткахъ квадрата разсмѣстить четыре большихъ буквы A, B, C, D такъ, чтобы всѣ четыре находились въ каждомъ горизонтальномъ и вертикальномъ ряду и въ каждой діагонали, и то же самое сдѣлать съ малыми буквами a, b, c, d такъ, чтобы онѣ комбинировались съ большими всѣми возможными способами.

Расположимъ сначала большія буквы, что̀ не представляетъ затрудненій. Расположимъ ихъ по алфавитному порядку въ

первой горизонтали и заполнимъ діагональ, идущую слѣва направо,—это можетъ быть сдѣлано только двумя способами: или *A*, *C*, *D*, *B*, или *A*, *D*, *B*, *C*. Примемъ первое расположеніе и заполнимъ затѣмъ остальныя клѣтки квадрата, что можетъ быть сдѣлано уже только единственнымъ путемъ. Получимъ квадратъ фиг. 37.

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

Фиг. 37.

Aa	Bd	Cb	Dc
Db	Cc	Ba	Ad
Bc	Ab	Dd	Ca
Cd	Da	Ac	Bb

Фиг. 38.

Чтобы размѣстить малыя буквы, мы сначала приставимъ къ каждой діагональной буквѣ *A*, *C*, *D*, *B* по малой буквѣ того же наименованія, а затѣмъ будемъ брать по двѣ клѣтки, равноотстоящихъ по обѣ стороны отъ этой діагонали, и около каждой большой буквы поставимъ малую одноименную съ большой буквой другой соотвѣтствующей клѣтки. Получимъ квадратъ, изображенный фиг. 38-й.

Если замѣнимъ теперь *A*, *B*, *C*, *D* соотвѣтственно черезъ **туза, короля, даму, валета,** а буквамъ *a*, *b*, *c*, *d* придадимъ значеніе мастей: **черви, бубны, пики, трефы,**—получимъ вышеприведенное рѣшеніе задачи (фиг. 36).

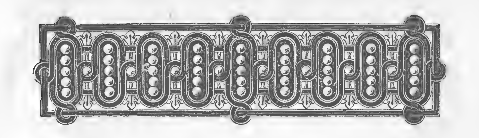
Большія буквы можно замѣнить **тузомъ, королемъ, дамой и валетомъ** 24-мя различными способами, точно также 4 маленькія буквы можно замѣнить 4-мя мастями 24-мя способами. Такъ что можно получить $24 \times 24 = 576$ **буквенныхъ** рѣшеній этой задачи.

Замѣчаніе. Нѣкоторыя изъ вышеприведенныхъ задачъ представляютъ примѣры вопросовъ, относящихся къ общей теоріи такъ называемыхъ **волшебныхъ квадратовъ**. Задачей о составленіи волшебныхъ квадратовъ математики занимались еще въ

глубокой древности, и происхожденіе этой задачи приписывается индусамъ. Несмотря, однако, на свою древность, нельзя сказать, чтобы и по настоящее время вопросъ о волшебныхъ квадратахъ былъ разрѣшенъ и исчерпанъ вполнѣ. Зависитъ это болѣе всего отъ того, что теорія волшебныхъ квадратовъ стоитъ особнякомъ и мало пока имѣетъ связи съ остальной математикой. Для желающихъ болѣе основательно познакомиться съ этой интересной областью математики ниже мы даемъ нѣкоторыя общія положенія теоріи волшебныхъ квадратовъ въ превосходномъ и краткомъ изложеніи проф. В. П. Ермакова («Журналъ Элем. Математики». Т. I. 1885 г.), позволивъ себѣ сдѣлать въ этихъ статьяхъ кое-какія сокращенія.

Свѣдѣнія по исторіи и литературѣ вопроса читатель можетъ найти также у Gunther'a: «Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der matematischen Wissenschaften», кар. IV и др., G. Arnoux: «Arithmétique graphique; les espaces arithmétiques hypermagiques».





Домино.

Историческія справки.

Предполагаютъ, что игра домино перешла къ намъ отъ индусовъ или грековъ. Дѣйствительно, простота этой игры наводитъ на мысль, что она придумана еще въ очень отдаленныя времена, на первыхъ ступеняхъ цивилизаціи. Что касается названія самой игры, то филологи находятся относительно этого въ разногласіи. Иные ищутъ его корня въ древнехананейскихъ нарѣчіяхъ, но вѣротнѣе всего такое предположеніе. Игра въ домино въ прежнія времена была дозволена въ монастыряхъ и религіозныхъ общинахъ. Но всякое дѣло начиналось тамъ, какъ извѣстно, съ восхваленія имени Божія. И когда игрокъ выставлялъ первую кость, онъ произносилъ: «*benedicamus Domino*» (бенедикамусъ Домино), т. е. «восхвалимъ Господа». Или произносилось «*Domino gratias*» (Домино гратіасъ), т. е. «благодареніе Господу». Отсюда и получилось въ сокращеніи просто слово *Домино*.

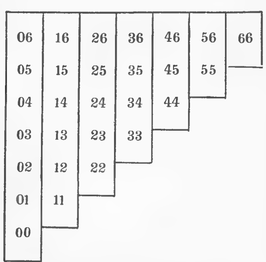
Опредѣленія.

Домино суть прямоугольныя продолговатыя плитки, ширина которыхъ обыкновенно вдвое больше толщины, а длина вдвое больше ширины. Дѣлаются онѣ чаще всего изъ кости, или дерева, а также и изъ металла; нижняя часть ихъ обыкновенно

черная, а верхняя бѣлая и раздѣлена на два квадратика, на которыхъ обозначены точки или очки домино. Чаще всего игра состоитъ изъ двадцати восьми домино, образующихъ всѣ комбинаціи по два изъ семи чиселъ:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Каждое домино опредѣляется числомъ очковъ, заключающихся на двухъ его квадратахъ, и въ зависимости отъ этого называется двумя числами, наприм., *нуль и нуль* обозначаетъ пустое, бѣлое домино, на квадратахъ котораго нѣтъ очковъ; *нуль и одинъ*—домино, на одномъ изъ квадратовъ котораго есть одно очко, а другой пустъ; *четыре и пять* -домино, на одномъ квадратѣ котораго стоитъ 4 очка, а на другомъ пять, и т. д. Сообразно съ этимъ мы будемъ обозначать домино **двумя цифрами,** показывающими число очковъ на каждомъ квадратикѣ и поставленными рядомъ. Такъ, домино *нуль и нуль* будемъ обозначать **00,** домино *четыре и шесть* обозначимъ черезъ **46** и т. д. Расположимъ всю игру изъ 28 домино въ такомъ порядкѣ (фиг. 39):



Фиг. 39.

Если взять сумму всѣхъ очковъ, содержащихся во всей игрѣ домино, то окажется 168 очковъ.

Среднее.

Всѣхъ очковъ на всѣхъ 28 плиткахъ, какъ сказано выше, 168. Если это послѣднее число подѣлить на число домино (плитокъ), то получимъ *среднее* каждой «кости», или плитки. Это среднее, какъ видимъ, равно *шести*, и оно останется такимъ же, если мы отбросимъ всѣ *двойняшки*, т. е. двойныя домино, какъ **66, 55, 44**, и т. д. Это можно провѣрить непосредственно. Въ самомъ дѣлѣ, всѣхъ двойняшекъ въ игрѣ семь (**66, 55, 44, 33, 22, 11, 00**), а число заключающихся въ нихъ очковъ оказывается равнымъ 42, $(6+6+5+5+4+4+3+ +3+2+2+1+1=42)$. Вычитая число 42 изъ общаго числа очковъ всей игры 168, получаемъ 126, дѣля же это послѣднее число на число оставшихся домино, т. е. на 21 $(28-7=21)$, получаемъ опять *среднее* 6.

Есть игры домино съ большимъ количествомъ костей. Такъ можно составить игру, гдѣ наибольшая кость будетъ **77**, и тогда всѣхъ костей будетъ 36. Въ игрѣ, гдѣ наибольшее должно будетъ **88**, всѣхъ домино будетъ 45 и т. д. И во всѣхъ такихъ играхъ относительно ихъ *средняго* будетъ наблюдаться одна и та же послѣдовательность. Среднее для игры, въ которой наибольшее домино есть **77**, будетъ *семь*, среднее для игры домино съ наибольшей костью **88**, будетъ *восемь* и т. д.

Дополнительныя домино.

Если возьмемъ 2 домино (обыкновенной игры, гдѣ наивысшая кость **6**) такихъ, что числа очковъ квадратиковъ въ одномъ дополняютъ числа очковъ квадратиковъ въ другомъ до шести, то такія домино называются *дополнительными* другъ друга. Такъ, наприм., домино **23** и **43** будутъ дополнительными другъ другу, какъ и домино: **12** и **54**, **14** и **52** и т. д.

Въ разсматриваемой нами обыкновенной игрѣ изъ 28 костей есть четыре кости: **06**, **15**, **24** и **33**, которыя *дополняютъ сами себя*, т. е. не имѣютъ другихъ дополнительныхъ.

Если взять для всей игры всѣ ея дополнительныя домино, то получимъ ту же игру только въ другомъ порядкѣ.

Въ чемъ состоитъ игра.

Игра проста и состоитъ, въ общихъ чертахъ, въ слѣдующемъ. Два, или болѣе, игрока дѣлятъ между собой кости игры. Чаще всего играютъ *съ прикупомъ*, т. е. берутъ по извѣстному равному числу костей, а остальныя кости лицевой частью внизъ лежатъ въ сторонѣ. 1-й игрокъ выкладываетъ на столъ какое-либо свое домино, 2-й по порядку долженъ приставить къ любому изъ квадратиковъ этого домино такую свою кость, квадратикъ которой имѣлъ бы столько же очковъ, сколько находится на квадратикѣ выставленной кости. Получается фигура изъ двухъ костей, оканчивающаяся двумя квадратиками. Къ любому изъ этихъ квадратиковъ слѣдующій игрокъ долженъ приложить свою соотвѣтствующую кость и т. д. по порядку. Если у кого не находится соотвѣтствующаго домино, онъ беретъ кости изъ *прикупа* до тѣхъ поръ, пока не найдетъ тамъ нужнаго домино, которое и приставляетъ къ образованной на столѣ фигурѣ. Выигравшимъ считается тотъ, кто первый успѣетъ положить всѣ имѣющіяся у него домино. Основы игры, какъ видимъ, весьма просты и несложны, а между тѣмъ съ помощью домино можно получить весьма поучительныя и полезныя развлеченія.

Забава-задача.

Переверните лицомъ внизъ всѣ кости игры домино. Одну же изъ костей тихонько спрячьте, наблюдая только, чтобы эта кость не была двойная. Затѣмъ предложите кому-либо взять любую изъ лежащихъ на столѣ костей, посмотрѣть ее и положить на столъ вверхъ лицевой стороной, а вслѣдъ затѣмъ пусть онъ же раскроетъ и всѣ остальныя домино и расположитъ ихъ вмѣстѣ съ первой открытой костью по правиламъ игры, но такъ, чтобы не замкнуть игры и не брать въ расчетъ двойняшекъ, или же ввести ихъ въ игру внѣ очереди. Получится нѣкоторое расположеніе костей всей игры домино: *и вы сможете заранѣе предсказать числа очковъ*, которыя получатся на концахъ этого

расположенія. Эти числа будутъ какъ разъ тѣ, которыя находятся на квадратикахъ раньше спрятаннаго вами домино.

Въ самомъ дѣлѣ, если расположить всѣ домино одно за другимъ въ порядкѣ, требуемомъ привилами игры, т.-е. чтобы послѣдовательныя кости соприкасались квадратиками съ одинаковымъ числомъ очковъ, то игра всегда окончится такимъ же числомъ очковъ, какимъ она началась. Если, скажемъ, расположеніе костей начинается квадратикомъ съ 5-ю очками, то оно и окончится 5-ю, при условіи, конечно, не закрывать игру, пока не будутъ положены всѣ кости. Итакъ, всѣ 28 костей игры можно расположить, соблюдая правила игры, по кругу, и если изъ этого круга отнять, напримѣръ, кость *три и пять*, то ясно, что расположеніе остальныхъ 27 костей начнется съ одной стороны *пятью*, а окончится *тремя*.

Этой небольшой забавой вы можете очень заинтересовать тѣхъ, кто не знаетъ, въ чемъ дѣло,—особенно, если показать видъ, что вы будто бы производите въ умѣ самыя сложныя вычисленія. Слѣдуетъ также при повтореніи забавы по возможности ее разнообразить и видоизмѣнять.

Задача 71-я.

Наибольшій ударъ.

Допустимъ, что играютъ въ домино четверо и что между ними подѣлены всѣ кости поровну, т.-е. при началѣ игры у каждаго игрока есть по *семи* костей. При этомъ могутъ получаться такія интересныя расположенія костей, при которыхъ первый игрокъ *обязательно выигрываетъ* въ то время, какъ второй и третій игроки не смогутъ положить ни одной кости. Пусть, напр., у перваго игрока будутъ четыре первыхъ нуля и три послѣднихъ туза, т.-е. такія кости:

00, 01, 02, 03, 14, 15, 16,

а у четвертаго игрока пусть будутъ остальные тузы и нули, т. е. кости:

11, 12, 12, 13, 04, 05, 06

и еще какая-либо кость. Остальныя домино подѣлены между 2-мъ и 3-мъ игроками. Въ такомъ случаѣ первый игрокъ необходимо выигрываетъ послѣ того, какъ будутъ положены всѣ 13 указанныхъ выше домино, а 2-й и 3-й игроки не смогутъ поставить ни одного изъ своихъ домино.

Въ самомъ дѣлѣ, первый игрокъ начинаетъ игру и ставитъ **60**. Второй и третій досадуютъ, ибо у нихъ нѣтъ подходящей кости. Тогда четвертый игрокъ можетъ положить любую изъ трехъ костей **04**, **05** или **06**. Но первый приложитъ въ отвѣтъ **41**, **51** или **61**. Второй и третій опять не смогутъ ничего положить, а четвертый поставитъ **11**, или **12**, или **13**, на что первый можетъ отвѣтить костями **10**, **20**, **30** и т. д. Такимъ образомъ онъ положитъ всѣ свои кости въ то время, какъ у второго и третьяго игрока останутся всѣ ихъ домино, а у четвертаго одно. Сколько же выигрываетъ первый? Сумма очковъ въ положенныхъ 13-ти домино равна, какъ легко видѣть, 48, а число очковъ всей игры есть 168. Значитъ первый игрокъ выигрываетъ 168 — 48 = *120* очковъ въ одну игру. Это *наибольшій ударъ!*

Можно составить и другія партіи, подобныя предыдущей. Для этого стоитъ только нули и единицы замѣнить соотвѣтственно домино съ иными количествами очковъ 2, 3, 4, 5 или 6. Число подобныхъ партій, слѣдовательно, равно числу всѣхъ простыхъ сочетаній изъ семи элементовъ по 2, т.-е. равно 21. Ясно, что вѣроятность получить такую партію *случайно*—весьма мала. Кромѣ того всѣ остальныя партіи, за исключеніемъ приведенной выше, дадутъ меньшее, чѣмъ 120, число выигранныхъ очковъ.

Задача 71-я.

Расположить семь единицъ и еще двѣ кости домино въ квадратѣ съ девятью клѣтками такъ, чтобы сумма очковъ домино, считая ихъ по столбцамъ (вертикально), по строкамъ (горизонтально) и по діагоналямъ была постоянно одна и та же.

Рѣшеніе.

Къ семи костямъ съ единицами прибавляютъ еще **26** и **36**, и тогда не трудно составить слѣдующій волшебный квадратъ (фиг. 40). Сумма очковъ въ его столбцахъ, строкахъ и діагоналяхъ равна 15.

26	01	15
12	14	16
13	36	11

Фиг. 40.

16	00	05
02	04	06
03	26	01

Фиг. 41.

Если здѣсь единицу замѣнить соотвѣтственно бѣлыми, а **26** и **36** костями **16** и **26**, то получимъ квадратъ (фиг. **41**) съ постоянной суммой, равной 12.

Точно также, если въ квадратѣ (фиг. 36) замѣнимъ домино съ единицами костями съ двойками, а **26** и **36** черезъ **36** и **46**, то получимъ новый волшебный квадратъ, содержащій семь костей съ двойками, въ которомъ постоянная сумма равна 18. Можно также построить съ помощью домино волшебные квадраты, содержащіе всѣ тройки или четверки съ двумя другими соотвѣтственно подобранными костями. Постоянныя суммы этихъ квадратовъ будутъ 20 и 24. Вообще при упражненіяхъ съ волшебными квадратами домино даютъ обильный матеріалъ.

Задача 73-я.

Взяты всѣ нули и единицы домино, и къ нимъ прибавлены еще три подходящія кости. Расположить шестнадцать костей на 16 клѣткахъ квадрата такъ, чтобы сумма очковъ, считаемыхъ вертикально, горизонтально и по обѣимъ діагоналямъ, была одинакова.

Рѣшеніе.

Къ нулямъ и единицамъ надо прибавить еще **25**, **26** и **36**, получимъ квадратъ (фиг. 42):

26	12	13	03
14	02	36	11
05	15	01	06
00	25	04	16

Фиг. 42.

Сумма очковъ каждаго столбца, каждой строки и каждой діагонали этого квадрата равна 18. Полученный квадратъ отличается тѣмъ интереснымъ свойствомъ, что въ немъ можно первый столбецъ передвинуть на 4-е мѣсто, или верхнюю строку перенести внизъ, и опять-таки получится волшебный квадратъ, отличающійся свойствомъ постоянства суммы.

Если въ квадратѣ фиг. 42-й вмѣсто нулей и единицъ взять всѣ кости, содержащія больше на очко или два, или 3, то опять получимъ волшебные квадраты съ постоянными суммами 22, 26 и 30. Если въ полученныхъ квадратахъ замѣнить каждую кость ея *дополнительной*, то опять получимъ волшебные квадраты.

Изъ 25 домино можно составить такой волшебный квадратъ (фиг. 43):

35	03	06	22	51
11	32	61	45	40
62	46	00	21	24
01	31	52	63	33
44	41	34	02	05

Фиг. 43.

Сумма очковъ, считая по столбцамъ, строкамъ и діагоналямъ этого квадрата, равна 27.

Перенося въ этомъ квадратѣ столбцы или строки, мы опять будемъ получать волшебные квадраты, подобно тому, какъ получали ихъ изъ квадрата съ 16-ю клѣтками (фиг. 42).

Задача 74-я.

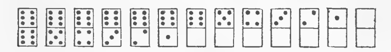
Вѣрная отгадка.

Возьмите двадцать пять костей домино, переверните ихъ лицомъ внизъ и положите рядомъ одна за другой такъ, чтобы они соприкасались болѣе длинными сторонами. Вслѣдъ затѣмъ объявите, что вы отвернетесь, или даже уйдете въ другую комнату, а кто-либо пусть съ праваго конца перемѣститъ на лѣвый какое-либо число домино (не болѣе, однако, двѣнадцати). Возвратившись въ комнату, вы тотчасъ открываете кость, число очковъ которой непремѣнно укажетъ число перемѣщенныхъ въ ваше отсутствіе домино.

Рѣшеніе.

Эта задача, очевидно, есть видоизмѣненіе задачи 2-й (стр. 22).

Все дѣло въ томъ, чтобы, приготовляясь къ «угадыванію» и переворачивая домино лицомъ внизъ, тринадцать изъ нихъ расположить въ такомъ послѣдовательномъ порядкѣ (фиг. 44):



Фиг. 44.

Рядъ этихъ домино, какъ видимъ, представляетъ рядъ первыхъ двѣнадцати чиселъ да еще нуль:

12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0;

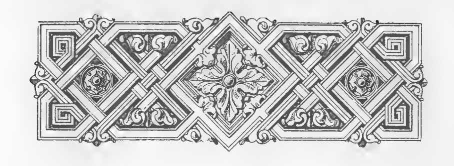
и числа эти идутъ въ убывающемъ порядкѣ. Справа за этимъ рядомъ домино вы помѣщаете (тоже лицомъ внизъ) еще 12 до-

мино въ какомъ угодно порядкѣ. Если теперь вы уйдете въ другую комнату, а кто-либо перемѣститъ справа налѣво нѣсколько (менѣе 12-ти) домино и приставитъ ихъ такъ, чтобы они шли за **66** влѣво, то, воротясь, вы откроете **среднюю** (т. е. 13-ю по счету, считая слѣва) кость въ ряду и на открытомъ домино будетъ какъ разъ столько очковъ, сколько было перемѣщено въ ваше отсутствіе костей.

Почему такъ, нетрудно разобраться. Когда вы уходите въ другую комнату, то вы знаете, что въ серединѣ ряда перевернутыхъ изнанкой вверхъ домино лежитъ бѣлое домино, т. е. **00**. Представимъ теперь, что перемѣщено въ ваше отсутствіе съ праваго конца на лѣвый одно домино. Какое тогда домино придется въ серединѣ? Очевидно, **01**, т. е. единица. А если перемѣстить 2 кости, то въ серединѣ придется домино съ 2-мя очками; если перемѣстить три кости, то въ серединѣ будетъ кость съ тремя очками и т. д. Словомъ, среднее домино обязательно и вѣрно покажетъ вамъ число перемѣщенныхъ справа на лѣвый конецъ домино (Перемѣщаются, какъ надо всегда помнить, не болѣе 12-ти костей).

Игру можно продолжать. Опять уйти въ другую комнату и попросить кого-либо перемѣстить съ лѣваго конца на правый еще нѣсколько домино. Возвратясь въ комнату, вы тоже откроете домино, указывающее число перемѣщенныхъ костей. Оно будетъ теперь вправо отъ средняго, и, чтобы найти его, надо за этимъ среднимъ домино отсчитать по порядку ровнехонько столько, сколько костей было перемѣщено въ предыдущій разъ.





Упражненія съ кускомъ бумаги.

Врядъ ли кто изъ нашихъ читателей не умѣетъ самъ изъ квадратнаго куска бумаги получить «пѣтушка», лодочку, кораблик, коробочку и т. д. Достигается это путемъ разнообразнаго перегибанія и складыванія бумажнаго квадрата. Полученные при этомъ сгибы (складки) позволяютъ придавать взятому куску бумаги ту или иную желаемую форму. Сейчасъ мы убѣдимся, что съ помощью перегибанія бумаги можно устраивать не однѣ только забавныя или интересныя игрушки, но и получить наглядное представленіе о многихъ фигурахъ на плоскости, а также объ ихъ свойствахъ. Кусокъ обыкновенной бѣлой (а еще лучше—цвѣтной) бумаги да перочинный ножикъ для разглаживанія или удаленія ненужныхъ частей могутъ оказаться прекраснымъ пособіемъ для усвоенія началъ геометріи. Считаемъ долгомъ обратить вниманіе читателя на книгу Сундара Рау (Sundara Row): «Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги» [1]), гдѣ этотъ вопросъ разработанъ съ достаточной полнотой и занимательностью. Здѣсь мы приводимъ изъ указанной книги только нѣсколько начальныхъ упражненій, которыя будутъ полезнымъ введеніемъ и дополненіемъ къ предлагаемымъ дальше задачамъ на разрѣзываніе и переложеніе фигуръ.

---

[1]) Есть въ переводѣ на русскій языкъ. Книгоиздательство «Mathesis».

Плоскость.—Прямоугольникъ.—Квадратъ.

На ровномъ столѣ лежитъ кусокъ неизмятой гладкой бумаги. Верхняя сторона этой бумаги есть плоская поверхность, или просто—плоскость. Нижняя сторона бумаги, касающаяся стола, есть тоже плоскость. Эти плоскости, или плоскія поверхности, раздѣлены веществомъ бумаги. Но вещество это очень тонко, поэтому другія стороны бумаги не представляютъ замѣтной поверхности, а на практикѣ мы считаемъ ихъ просто линіями. Такимъ образомъ, обѣ плоскія поверхности бумаги, хотя и различны, но неотдѣлимы другъ отъ друга.

Допустимъ, что у насъ есть кусокъ бумаги неправильной формы (см. фиг. 45). Страница лежащей передъ нами книги имѣетъ форму такъ называемаго *прямоугольника*. Зададимся задачей:

Задача 75-я.

Куску бумаги неправильной формы дать форму прямоугольника.

Рѣшеніе.

Положите кусокъ бумаги неправильной формы на столъ и сдѣлайте сгибъ близъ края. Пусть полученный при этомъ сгибъ будетъ XX'. Это прямая линія. Проведите ножомъ по сгибу и отдѣлите меньшую часть куска. Такимъ образомъ вы получили прямолинейный край. Подобно предыдущему, согните бумагу по линіи BY такъ, чтобы прямолинейный край XX' накладывался аккуратно самъ на себя. Развернувъ затѣмъ бумагу, мы убѣдимся, что сгибъ BY идетъ подъ *прямымъ угломъ* къ краю XX'; и наложеніе показываетъ, что уголъ YBX' равенъ углу YBX, и что каждый изъ этихъ угловъ равенъ угламъ страницы. Какъ раньше, проведите ножомъ по второй складкѣ и удалите ненужную часть.

Повторяя указанный пріемъ, вы получите края CD и DA. Наложеніе докажетъ, что углы при A, B, C и D прямые и равны другъ другу, и что стороны BC и CD соотвѣт-

ственно равны DA и AB. Итакъ, полученный кусокъ бумаги $ABCD$ (фиг. 45) имѣетъ форму, подобную страницѣ этой книги. Его можно даже сдѣлать равнымъ этой страницѣ, если взять достаточно большой кусокъ бумаги и отмѣрить AB и BC такъ, чтобы онѣ были равны сторонамъ страницы.



Фиг. 45.

Полученная фигура, какъ мы уже говорили, называется *прямоугольникомъ*, и наложеніе доказываетъ слѣдующія его свойства: 1) четыре его угла всѣ прямые и равны между собой, 2) четыре же стороны не всѣ равны, но 3) двѣ болѣе длинныя стороны равны между собой, а двѣ болѣе короткія— между собой.

Задача 76-я.

Изъ прямоугольника сгибаніемъ получить квадратъ.

Рѣшеніе.

Взявъ прямоугольный кусокъ бумаги, $A'B'CD$, складываемъ его наискось такъ, чтобы одна изъ короткихъ сторонъ, напр. CD, легла на длинную DA', какъ это показано на фиг. 46-ой:

Уголъ D помѣстится на краю DA' въ точкѣ A, конецъ перегиба по краю CB' получится въ точкѣ B. Сдѣлаемъ пере-



Фиг. 46.

гибъ черезъ точки A и B, затѣмъ, отогнувъ, удалимъ по линіи AB часть $A'B'BA$, которая выдается. Развернувъ послѣ этого листъ, найдемъ фигуру $ABCD$, которая и есть квадратъ. Въ немъ всѣ четыре угла прямые и всѣ стороны равны.

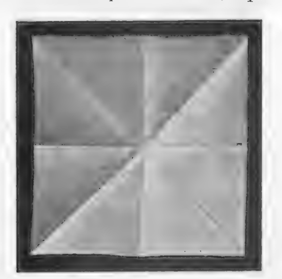
Линія сгиба, проходящая черезъ два противоположные угла B и D, есть *діагональ* этого квадрата. Другая діагональ получается перегибомъ квадрата черезъ другую пару противоположныхъ угловъ, какъ это видно на фиг. 47. Непосредствен-

нымъ наложеніемъ убѣждаемся, что діагонали квадрата пересѣкаются другъ съ другомъ подъ прямыми углами, и что въ



Фиг. 47.

точкѣ пересѣченія онѣ взаимно дѣлятся пополамъ. Эта точка пересѣченія діагоналей квадрата называется *центромъ* квадрата.

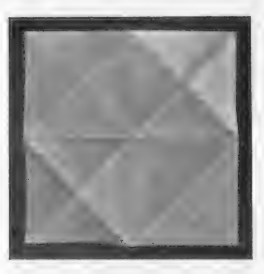


Фиг. 48.

Каждая діагональ дѣлитъ квадратъ на два совпадающихъ при наложеніи *треугольника*, вершины которыхъ находятся въ

противоположныхъ углахъ квадрата. Каждый изъ этихъ треугольниковъ имѣетъ, очевидно, по двѣ равныя стороны, т. е. эти треугольники *равнобедренные*. Кромѣ того, эти треугольники и *прямоугольные*, такъ какъ каждый изъ нихъ имѣетъ по прямому углу.

Двѣ діагонали, какъ легко видѣть, раздѣляютъ квадратъ на 4 совпадающихъ при наложеніи (т. е. равныхъ) прямоугольныхъ и равнобедренныхъ треугольника, общая вершина которыхъ находится въ центрѣ квадрата.

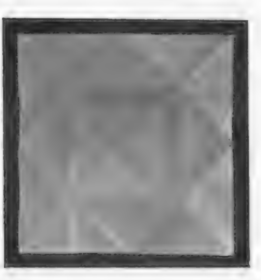


Фиг. 49.

Перегнемъ теперь нашъ бумажный квадратъ пополамъ такъ, чтобы одна сторона совпадала съ противоположною ей. Получаемъ сгибъ, проходящій черезъ центръ квадрата (фиг. 48). Линія этого сгиба обладаетъ, какъ легко убѣдиться, слѣдующими свойствами: 1) она *перпендикулярна* двумъ другимъ сторонамъ квадрата, 2) дѣлитъ эти стороны пополамъ, 3) *параллельна* двумъ первымъ сторонамъ квадрата, 4) сама дѣлится въ центрѣ квадрата пополамъ, 5) дѣлитъ квадратъ на два совпадающихъ при наложеніи прямоугольника, изъ которыхъ каждый равенъ, значитъ, половинѣ квадрата. 6) Каждый изъэтихъ прямоугольниковъ *равновеликъ* (т. е. равенъ по площади) одному изъ треугольниковъ, на которые квадратъ дѣлится діагональю.

Перегнемъ квадратъ еще разъ такъ, чтобы совпадали двѣ другія стороны. Полученный сгибъ и сдѣланный раньше дѣлятъ квадратъ на 4 совпадающихъ при наложеніи квадрата (фиг. 48).

Перегнемъ эти 4 меньшихъ квадрата черезъ углы ихъ, лежащіе посрединѣ сторонъ большого квадрата (по діагоналямъ) и получимъ квадратъ (фиг. 49), вписанный въ нашъ начальный квадратъ. Этотъ вписанный квадратъ, какъ легко убѣдиться, равенъ по площади половинѣ большого и имѣетъ тотъ же центръ.



Фиг. 50.

Соединяя середины сторонъ этого внутренняго, вписаннаго, квадрата, получимъ квадратъ, равный четверти первоначальнаго (фиг. 50). Если въ этотъ послѣдній квадратъ по предыдущему опять впишемъ квадратъ, то онъ будетъ равенъ восьмой долѣ первоначальнаго. Въ этотъ въ свою очередь можемъ вписать квадратъ, равный шестнадцатой долѣ первоначальнаго, и т. д.

Если перегнуть нашъ квадратъ какъ угодно, но такъ, чтобы сгибъ проходилъ черезъ центръ, то квадратъ раздѣлится на двѣ совпадающія при наложеніи *трапеціи*.

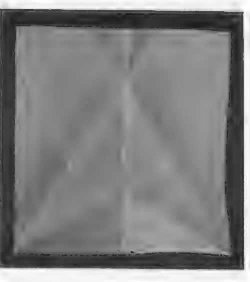
Задача 77-я.

Равнобедренный и равносторонній треугольники.

Изъ бумажнаго квадрата сгибаніемъ получить равнобедренный треугольникъ.

Рѣшеніе.

Возьмемъ квадратный кусокъ бумаги и сложимъ его вдвое такъ, чтобы противоположные края его совпадали (фиг. 51).



Фиг. 51.

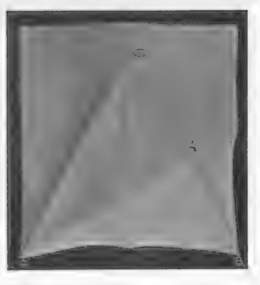
Получается сгибъ, проходящій черезъ середины двухъ другихъ сторонъ и перпендикулярный къ нимъ. На этой *средней линіи квадрата* беремъ какую-либо точку и дѣлаемъ такіе сгибы, которые проходятъ черезъ эту точку и черезъ углы квадрата, лежащіе по обѣ стороны средней линіи. Такимъ образомъ получаемъ *равнобедренный треугольникъ*, въ *основаніи* котораго лежитъ сторона квадрата. Средняя линія дѣлитъ, очевидно, равнобедренный треугольникъ на два совпадающихъ при наложеніи и прямоугольныхъ треугольника. Она же дѣлитъ уголъ при *вершинѣ* равнобедреннаго треугольника пополамъ.

Задача 78-я.

Изъ бумажнаго квадрата сбиганіемъ получить равносторонній треугольникъ.

Рѣшеніе.

Возьмемъ на средней линіи квадрата такую точку, чтобы разстоянія ея отъ двухъ угловъ квадрата были равны его сторонѣ, и сдѣлаемъ сгибы, какъ выше. Въ такомъ случаѣ получимъ равносторонній треугольникъ (фиг. 52).



Фиг. 52.

Примѣчаніе. Требуемую точку на средней линіи квадрата найти легко. Для этого надо надъ AA' (фиг. 52) повертывать основаніе AB около одного изъ его концовъ, A, пока другой его конецъ, B, не упадетъ на среднюю линію въ C.

Сложимъ равносторонній треугольникъ, накладывая каждую изъ сторонъ на основаніе. Мы получимъ такимъ образомъ три высоты этого треугольника: AA', BB', CC' (фиг. 53).

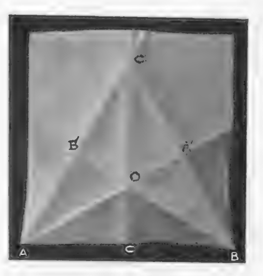
Вотъ нѣкоторыя свойства равносторонняго $\triangle$-ка, которыя можно вывести изъ разсмотрѣнія полученной нами фиг. 53:

Каждая изъ высотъ раздѣляетъ треугольникъ на два совпадающихъ при наложеніи прямоугольныхъ треугольника.

Онѣ дѣлятъ стороны пополамъ и перпендикулярны къ нимъ.

Онѣ проходятъ черезъ одну общую точку.

Пусть высоты AA' и CC' встрѣчаются въ O. Проведемъ BO и продолжимъ ее до встрѣчи съ AC въ B'. Теперь докажемъ, что BB' есть третья высота. Изъ треугольниковъ $C'OB$ и BOA' находимъ, что $OC' = OA'$ и убѣждаемся, что $OBC' = \angle A'BO$. Затѣмъ, изъ треугольниковъ ABB' и $CB'B$ слѣдуетъ,



Фиг. 53.

что $\llcorner AB'C = \llcorner BB'C$, т. е. каждый изъ нихъ есть прямой уголъ. Значитъ, BOB' есть высота равносторонняго треугольника ABC. Она также дѣлитъ AC пополамъ въ B'.

Можно, сходно съ предыдущимъ, показать, что OA, OB и OC равны и что также равны OA', OB' и OC'.

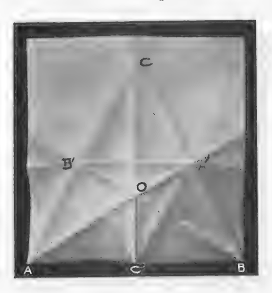
Поэтому изъ O, какъ центра, можно описать окружности, которыя пройдутъ соотвѣтственно черезъ A, B и C и черезъ A', B' и C'. Послѣдній кругъ касается сторонъ треугольника.

Равносторонній треугольникъ ABC дѣлится на шесть совпадающихъ при наложеніи прямоугольныхъ треугольниковъ, углы которыхъ при точкѣ O всѣ равны, и на три такихъ совпадающихъ

при наложеніи симметричныхъ четыреугольника, что около нихъ можно описать окружности.

Треугольникъ AOC равенъ удвоенному треугольнику $A'OC$; отсюда $AO=2\,OA'$. Аналогично, $BO=2\,OB'$ и $CO=2\,OC'$. Значитъ, радіусъ круга, описаннаго около треугольника ABC, вдвое больше радіуса вписаннаго круга.

Прямой уголъ A квадрата дѣлится линіями AO и AC на три равныя части. Уголъ $BAC=\frac{2}{3}$ прямого угла. Углы $C'AO$



Фиг. 54.

и OAB' равны $\frac{1}{3}$ прямого угла каждый. То же относится къ угламъ при B и C.

Шесть угловъ при O равны $\frac{2}{3}$ прямого каждый.

Перегните бумагу по линіямъ $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$ (фиг. 54). Въ такомъ случаѣ $A'B'C'$ есть равносторонній треугольникъ. Онъ равенъ по площади четверти треугольника ABC.

$A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ параллельны соотвѣтственно AB, BC, CA и равны половинамъ ихъ.

$AC'A'B'$ есть *ромбъ*; $C'BA'B'$ и $CB'C'A'$ также.

$A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ дѣлятъ соотвѣтственныя высоты пополамъ.

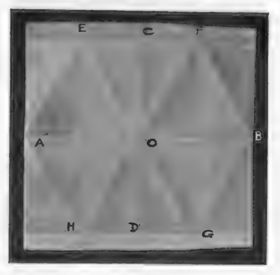
Задача 79-я.

Шестиугольникъ.

Изъ квадрата получить правильный шестиугольникъ.

Рѣшеніе.

Перегибаемъ квадратъ черезъ середины противоположныхъ сторонъ (фиг. 55). Получаемъ линіи AOB и COD. На сгибахъ



Фиг. 55.

AO и OB строимъ извѣстнымъ намъ уже способомъ равносторонніе треугольники AOE, AOH, BOF, BOG.

Дѣлаемъ сгибы EF и HG.

Многоугольникъ $AHGBEF$ и будетъ правильный шестиугольникъ, въ чемъ каждый безъ труда убѣдится самъ. Наибольшая ширина многоульника есть, очевидно, AB.

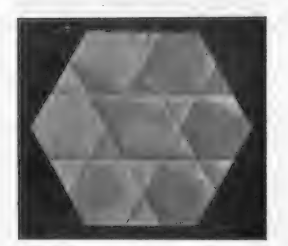
Фигура 56-я представляетъ образецъ орнамента изъ равностороннихъ треугольниковъ и правильныхъ шестиугольниковъ, который вы теперь легко можете построить сами.

Можно въ свою очередь раздѣлить шестиугольникъ на равные правильные шестиугольники и равносторонніе треугольники

(фиг. 57), дѣлая перегебы черезъ точки, дѣлящія его стороны на три равныя части. Получается красивый симметричный орнаментъ.



Фиг. 56.



Фиг. 57.

Можно получить шестиугольникъ еще и слѣдующимъ путемъ: Возьмемъ равносторонній треугольникъ и перегнемъ его такъ, чтобы всѣ его вершины сошлись въ центрѣ.

Изъ того, что мы уже узнаемъ о равностороннемъ треугольникѣ, не трудно вывести, что сторона полученнаго шестиугольника равна $\frac{1}{3}$ стороны взятаго равносторонняго треугольника. Площадь же этого шестиугольника равна $\frac{2}{3}$ площади взятаго треугольника.

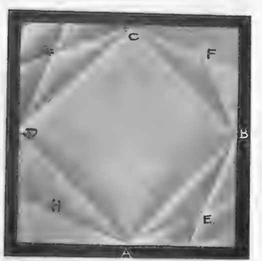
Задача 80-я.

Восьмиугольникъ.

Въ данномъ квадратѣ построить правильный восьмиугольникъ.

Рѣшеніе.

Возьмемъ квадратъ и извѣстнымъ уже намъ способомъ посредствомъ сгибовъ впишемъ въ него другой квадратъ (фиг. 58).



Фиг. 58.

Раздѣлимъ пополамъ углы между сторонами даннаго и вписаннаго квадратовъ. Пусть сгибы, равнодѣлящіе эти углы, пересѣкаются въ точкахъ E, F, G и H.

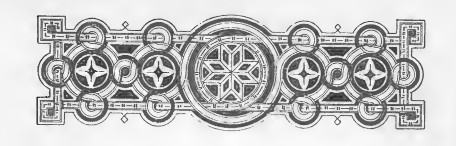
Многоугольникъ $AEBFCGDH$ и есть искомый правильный восьмиугольникъ. Дѣйствительно, треугольники ABE, BFC,

CGD и *DHA* въ немъ равнобедренные и при наложеніи совпадаютъ. Значитъ, стороны полученнаго восьмиугольника равны. (Сгибъ *DH* на фиг. 58 не сдѣланъ, но читатель легко восполнитъ его самъ).

Углы его тоже равны. Въ самомъ дѣлѣ, каждый изъ угловъ при вершинахъ *E*, *F*, *G*, *H* тѣхъ же треугольниковъ равенъ полтора раза взятому прямому углу, такъ какъ углы при основаніи этихъ треугольниковъ равны четверти прямого угла. Отсюда ясно, что и углы восьмиугольника при точкахъ *A*, *B*, *C* и *D* также равны полтора раза взятому прямому углу каждый, т. е. всѣ углы восьмиугольника равны между собой.

Сторона взятаго квадрата, *a*, представляетъ наибольшую ширину восьмиугольника.





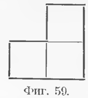
Разрѣзываніе и переложеніе фигуръ.

Призовемъ на помощь ножницы и будемъ не только перегибать, но и разрѣзывать бумагу. Такимъ путемъ придемъ ко многимъ интереснымъ и поучительнымъ задачамъ.

Задача 81-я.

Какъ вырѣзать?

Фигура состоитъ изъ трехъ равныхъ квадратовъ, расположенныхъ слѣдующимъ образомъ:

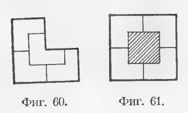


Фиг. 59.

Вырѣзать изъ этой фигуры такую часть, чтобы, приложивъ ее къ оставшейся части, получить внутри полный квадратъ.

Рѣшеніе.

При рѣшеніи этой задачи можно пользоваться листомъ картона или бумаги (лучше всего графленой на квадратныя клѣтки. Какъ сдѣлать требуемую вырѣзку, видно изъ нижеслѣдующихъ фигуръ (60 и 61):


Фиг. 60. Фиг. 61.

Не трудно видѣть также, что всѣ четыре полученныя изъ трехъ квадратовъ фигуры при наложенiи одна на другую совпадаютъ.

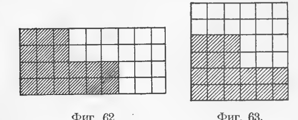
Задача 82-я.

Изъ прямоугольника квадратъ.

Кусокъ бумаги или картона имѣетъ форму прямоугольника, одна сторона котораго равна 4-мъ, а другая 9-ти единицамъ длины. Требуется разрѣзать этотъ прямоугольникъ на двѣ равныя части такъ, чтобы, сложивъ ихъ извѣстнымъ образомъ, получить квадратъ.

Рѣшенiе.

Рѣшенiе вопроса видно изъ слѣдующихъ фигуръ (62 и 63):


Фиг. 62. Фиг. 63.

Какъ ни проста и ни легка эта задача, но она представляетъ геометрическое толкованiе того, что $4 \times 9 = 6 \times 6$. Кромѣ того, подобнаго рода задачи прекрасно подготовляютъ къ болѣе сложнымъ задачамъ о превращенiи однѣхъ фигуръ въ другiя посредствомъ разрѣзыванiя ихъ на части и переложенiя этихъ частей. Желающiй можетъ самъ придумать еще много подобныхъ задачъ.

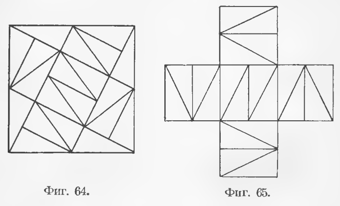
Задача 83-я.

Квадратъ на 20 равныхъ треугольниковъ.

Разрѣзать квадратный кусокъ бумаги на 20 равныхъ треугольниковъ.

Рѣшеніе.

1) Середины сторонъ квадрата соединимъ прямыми съ противоположными вершинами квадрата; 2) изъ серединъ сторонъ квадрата проведемъ линіи, параллельныя проведеннымъ линіямъ соединенія до встрѣчъ съ другими линіями соединенія, 3) въ полученныхъ прямоугольникахъ проведемъ діагонали, и тогда данный квадратъ будетъ разбитъ на 20 **прямоугольныхъ** треугольниковъ, какъ можно видѣть изъ приложеннаго рисунка (фиг. 64).



Фиг. 64. Фиг. 65.

Не трудно показать также въ полученныхъ треугольникахъ, что стороны, обнимающія прямой уголъ, таковы, что одна вдвое больше другой (катетъ равенъ половинѣ другого катета).

Полученные 20 треугольниковъ можно расположить въ пять равныхъ квадратовъ, и эти квадраты расположить въ видѣ креста (фиг. 65).

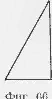
Огромное значеніе въ математикѣ имѣетъ слѣдующая задача, на которую совѣтуемъ обратить особое вниманіе:

Задача 84-я.

Теорема Пиѳагора.

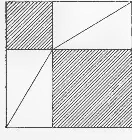
Показать, что квадратъ, построенный на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на его катетахъ.

Нарисуемъ 2 равныхъ квадрата (фиг. 67 и 68), стороны которыхъ равны суммѣ обоихъ катетовъ даннаго треугольника (фиг. 66).

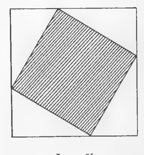


Фиг. 66.

Вслѣдъ затѣмъ въ полученныхъ нами квадратахъ произведемъ построенія, указанныя на фиг. 67 и 68.



Фиг. 67.

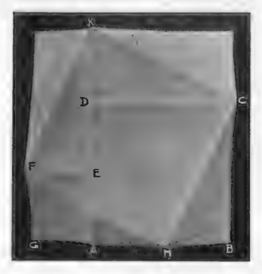


Фиг. 68.

Здѣсь отъ каждаго изъ равныхъ квадратовъ мы отнимаемъ по 4 равныхъ треугольника. Если отнимать отъ равныхъ величинъ поровну, то и остатки получаются равные. Эти остатки на фиг. 67 и 68 заштрихованы; но на фиг. 67-й получаются два квадрата, построенныхъ на катетахъ даннаго треугольника, а на фиг. 68-ой—квадратъ, построенный на гипотенузѣ; и сумма первыхъ двухъ квадратовъ равна, слѣдовательно, второму.

Мы доказали, такимъ образомъ, знаменитую теорему Пиѳагора.

Другое доказательство той же знаменитой теоремы найдемъ, если на взятомъ бумажномъ квадратѣ сдѣлаемъ сгибы, какъ указано на фиг. 69-ой.



Фиг. 69.

Здѣсь FGH есть прямоугольный треугольникъ, и квадратъ, построенный на FH, равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на FG и GH.

Задача 85-я.

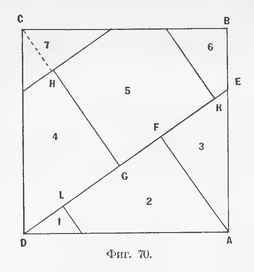
Изъ квадрата 3 квадрата.

Разрѣзать квадратъ на семь такихъ частей, чтобы, сложивъ ихъ надлежащимъ образомъ, получить три равныхъ квадрата.

Рѣшеніе.

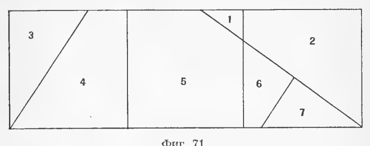
Пусть будетъ $ABCD$ (фиг. 70) данный квадратъ. Отложимъ на его сторонѣ линію AE, равную половинѣ діагонали этого квадрата. Соединимъ D съ E и на полученную линію DE опустимъ перпендикуляры AF и CG. Затѣмъ откладываемъ прямыя GH, GK, FL, всѣ равные AF, и заканчиваемъ построеніе линіями, параллельными или перпендикулярными AF, какъ

указано на фигурѣ 70-ой. Если разрѣзать теперь квадратъ по проведеннымъ линіямъ и сложить затѣмъ всѣ полученныя



Фиг. 70.

части такъ, какъ указано на слѣдующей фигурѣ 71-й, то и получимъ 3 искомыхъ квадрата:



Фиг. 71.

Замѣчаніе. Математическое доказательство этого предоставляемъ читателю, замѣтивъ только, что, пользуясь подобіемъ треугольниковъ и теоремой Пиѳагора, доказанной въ предыдущей задачѣ (квадратъ гипотенузы = суммѣ квадратовъ катетовъ), нетрудно вывести, что

$$3\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2.$$

Необходимо также еще замѣтить, что разсматриваемая задача можетъ быть сведена къ такимъ:

1. Разрѣзать квадратъ на наименьшее число частей, которыя, соотвѣтственно сложенныя, давали бы нѣкоторое число равныхъ между собою квадратовъ.

2. Разрѣзать квадратъ на такія части, изъ которыхъ можно было бы составить данное число равныхъ квадратовъ.

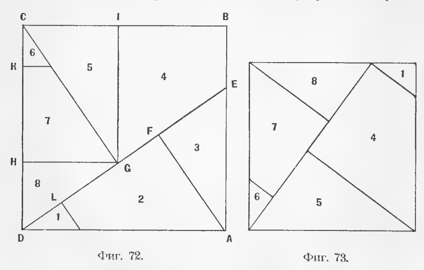
Задача 86-я.

Разрѣзать квадратъ на 8 такихъ частей, чтобы, сложивъ ихъ соотвѣтственнымъ образомъ, получить два квадрата, изъ которыхъ одинъ былъ бы вдвое болѣе другого.

Рѣшеніе.

Изъ прилагаемаго чертежа (фиг. 72) видно, какъ нужно разрѣзать квадратъ. Линіи AF, CG и точка L опредѣляются такъ же, какъ и въ предыдущей задачѣ.

Затѣмъ параллельно сторонамъ квадрата проводятся GH и GI (фиг. 72) и берется $HK = GH$. Такимъ образомъ получается восемь частей, изъ которыхъ и составляются требуемые квадраты.



Фиг. 72. Фиг. 73.

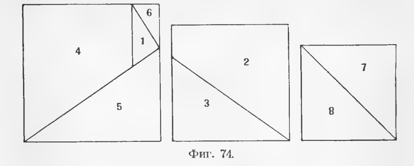
Одинъ изъ нихъ представленъ фиг. 73-ей, а другой есть средній въ фиг. 74-ой.

Задача 87-я.

Разрѣзать квадратъ на такія 8 частей, чтобы, соотвѣтственно сложенныя, онѣ составили 3 квадрата, площади которыхъ были бы пропорціональны числамъ 2, 3 и 4.

Рѣшеніе.

Квадратъ разрѣзывается точно такъ же, какъ и въ предыдущей задачѣ (фиг. 72). Изъ полученныхъ 8 частей составляются 3 требуемыхъ квадрата такъ, какъ на фиг. 74-ой:



Фиг. 74.

По даннымъ рѣшеніямъ-рисункамъ не трудно доказать математически правильность этихъ построеній, что желающій вникнуть въ сущность данной задачи пусть и сдѣлаетъ.

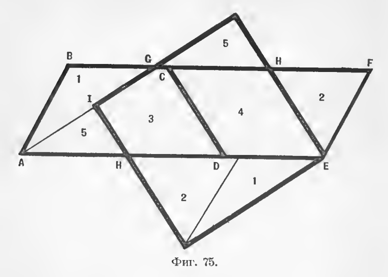
Задача 88-я.

Разрѣзать правильный шестиугольникъ на 5 такихъ частей, чтобы, соотвѣтственно сложенныя, онѣ образовали квадратъ.

Рѣшеніе.

Разрѣзываемъ шестиугольникъ сначала по діагонали и складываемъ полученныя 2 половины такъ, чтобы онѣ образовали параллелограммъ $ABFE$ (см. фиг. 75). Изъ точки A, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ средней пропорціональной между длиной AE и высотой параллелограмма, проводимъ окружность,

которая пересѣчетъ BF въ точкѣ G. Затѣмъ изъ точки E опускаемъ перпендикуляръ EH на продолженіе AG и проводимъ прямую IK параллельно EH и на разстояніи отъ нея, равномъ AG. Такимъ путемъ шестиугольникъ оказывается раз-



Фиг. 75.

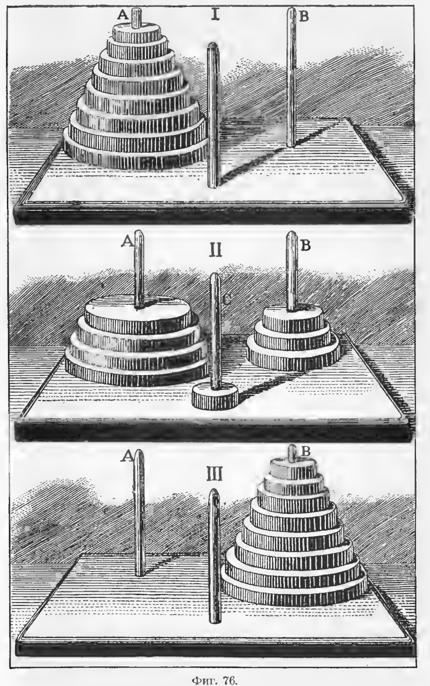
рѣзаннымъ на 5 такихъ частей, изъ которыхъ можно образовать квадратъ. Не разъясняемъ болѣе этой задачи, такъ какъ предназначаемъ ее для знающихъ курсъ элементарной геометріи на плоскости.

Задача 89-я.

Ханойская башня.—Тонкинскій вопросъ.

Возьмемъ 8 деревянныхъ, или изъ толстаго картона, кружковъ уменьшающагося діаметра и три вертикально укрѣпленныя на пластинкѣ палочки (стержня). Кружки снабжены въ центрѣ отверстіями, и ихъ накладываютъ, начиная съ наибольшаго, на одну изъ палочекъ A такъ, что получается родъ усѣченнаго конуса. Это и есть Ханойская башня въ 8 этажей. (См. фиг. 76, A, вверху).

Требуется всю эту башню съ палочки A перенести на палочку B, пользуясь третьей палочкой (I, II, и III на



Фиг. 76.

нашемъ рисункѣ), какъ вспомогательной, и соблюдая слѣдующія условія: 1) не переносить за одинъ разъ болѣе одного кружка и 2) класть снятый кружокъ или на ту палочку, которая свободна, или накладывать его на кружокъ большаго діаметра. Надѣвать на какую-либо изъ палочекъ большій кружокъ поверхъ меньшаго—нельзя.

Рѣшеніе.

Чтобы показать процессъ правильнаго перенесенія кружковъ, обозначимъ кружки цифрами 1, 2, 3, . . ., 7, 8, начиная съ наименьшаго; затѣмъ изобразимъ процессъ перенесенія нижеслѣдующей табличкой:

	Палочка А.	*Вспомогательная палочка.*	*Палочка В.*
до начала	1,2,3,4,5,6,7,8	—	—
послѣ 1-го перенесенія:	2,3,. . . . 8	1	—
» 2-го »	3,4 . . . 8	1	2
» 3-го »	3.4 . . . 8	—	1,2
» 4-го »	4,5 . . 8	3	1,2
» 5-го »	1,4,5,. . 8	3	2
» 6-го »	1,4,5,. . 8	2,3	—
» 7-го »	4,5,. . 8	1,2,3	—
» 8-го »	5,6,7,8	1,2,3	4
» 9-го »	5,6,7,8	2,3	1,4
» 10-го »	2,5,6,7,8	3	1,4
» 11-го »	1,2,5,6,7,8	3	4
» 12-го »	1,2,5,6,7,8	—	3,4
» 13-го »	2,5,6,7,8	1	3,4
» 14-го »	5,6,7,8	1	2,3,4
» 15-го »	5,6,7,8	—	1,2,3,4

и т д.

Отсюда мы видимъ, что на палочку III, когда она свободна, надѣваются только нечетные кружки (1-ый. 3-ій, 5-ый и пр.), а на *B*—только четные. Такъ что, напр., для перенесенія

четырехъ верхнихъ кружковъ, нужно было сперва перенести три верхніе на вспомогательную палочку — что, какъ видно изъ таблицы, потребовало 7 отдѣльныхъ переложеній, — затѣмъ мы перенесли 4-ый кружокъ на третью палочку — еще одно переложеніе — и, наконецъ, три верхніе кружка со второй палочки перенесли на ту же третью поверхъ 4-го кружка (при чемъ 1-ая палочка играла у насъ роль вспомогательной), что опять потребовало 7-ми отдѣльныхъ переложеній.

Итакъ, вообще: чтобы при такихъ условіяхъ перенести колонну изъ n какихъ нибудь элементовъ, расположенныхъ вертикально въ убывающемъ порядкѣ, нужно сначала перенесть колонну изъ $(n-1)$ верхнихъ элементовъ на одно изъ свободныхъ мѣстъ, потомъ основаніе, т. е. n-ный элементъ—на другое свободное мѣсто и, наконецъ,—на то же же мѣсто опять всю колонну изъ $(n-1)$ верхнихъ элементовъ.

Обозначая число необходимыхъ отдѣльныхъ перенесеній буквою Π со значкомъ, соотвѣтствующимъ числу элементовъ, имѣемъ, слѣдовательно:

$$\Pi_n = 2 \cdot \Pi_{n-1} + 1.$$

Понижая значеніе n до единицы и дѣлая подстановку, легко находимъ:

$$\Pi_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdot \cdot \cdot + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

Получаемъ, слѣдовательно, сумму геометрической прогрессіи, которая даетъ

$$\Pi_n = 2^n - 1.$$

Такимъ образомъ, въ случаѣ Ханойской башни, т. е. при 8 кружкахъ, нужно сдѣлать $2^8 - 1$ или 255 отдѣльныхъ переложеній кружковъ.

Легенда.

Если выше вмѣсто 8 кружковъ возьмемъ 64 кружка, то получимъ задачу, связанную съ древне-индійской легендой. Легенда эта гласитъ, будто въ городѣ Бенаресѣ, подъ куполомъ главнаго храма, въ томъ мѣстѣ, гдѣ находится середина Земли, богъ Брама поставилъ вертикально на бронзовой площадкѣ три алмаз-

ныя палочки, каждая длиною въ локоть и толщиною въ корпусъ пчелы. При сотвореніи міра на одну изъ этихъ палочекъ были одѣты 64 кружка изъ чистаго золота съ отверстіями посрединѣ,— такъ, что они образовали родъ усѣченнаго конуса, такъ какъ діаметры ихъ шли въ возрастающемъ порядкѣ, начиная сверху. Жрецы, смѣняемые одинъ другимъ, днемъ и ночью безъ устали трудятся надъ перенесеніемъ этой колонны кружковъ съ первой палочки на третью, пользуясь второй какъ вспомогательной, при чемъ они обязаны соблюдать уже указанныя условія, т. е. 1) не переносить за одинъ разъ болѣе одного кружка, и 2) класть снятый кружокъ или на свободную въ этотъ моментъ палочку, или накладывать его на кружокъ только большаго діаметра. Когда, соблюдая всѣ эти условія, жрецы перенесутъ всѣ 64 кружка съ первой палочки на 3-ю,—наступитъ конецъ міра...

Допустимъ, что переносъ одного кружка продолжается всего одну секунду, тогда на перемѣщеніе ханойской башни изъ восьми кружковъ потребуется 4 минуты слишкомъ. Что же касается переноса башни въ 64 кружка, то на это понадобится.

18 446 744 073 709 551 615 сек.

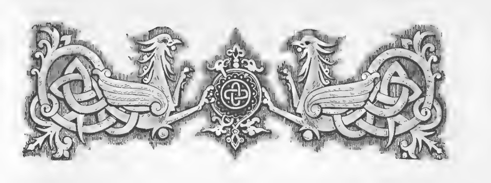
А это значитъ, не болѣе и не менѣе, какъ **пять слишкомъ милліардовъ вѣковъ (столѣтій).**

Міръ Брамы, очевидно, продержится еще очень и очень много лѣтъ.

Если кружки и палочки въ данной игрѣ замѣнить входящими другъ въ друга колпачками, то получаемъ игру, называемую **Тонкинскимъ вопросомъ** или **Китайскими шляпами.**

Вмѣсто кружковъ или колпачковъ, желающіе могутъ употреблять обыкновенныя игральныя карты.





Шахматы.

По поводу приведеннаго выше (задача 89-я) 20-ти-значнаго числа существуетъ другая легенда, тоже индусскаго происхожденія, которую разсказываетъ арабскій писатель Асафадъ.

Браминъ Сесса, сынъ Дагера, придумалъ игру въ шахматы, гдѣ король, хотя и самая важная фигура, не можетъ ступить шагу безъ помощи и защиты своихъ подданныхъ пѣшекъ и другихъ фигуръ. Изобрѣлъ онъ эту игру въ забаву своему монарху и повелителю Индія, Шерану. Царь Шеранъ, восхищенный выдумкой брамина, сказалъ, что дастъ ему **все, что только браминъ захочетъ**.

— Въ такомъ случаѣ, ваше величество,—сказалъ Сесса,— прикажите дать мнѣ столько пшеничныхъ зеренъ, сколько ихъ получится, если на первую клѣтку шахматной доски положить зерно, на вторую 2, на третью 4, на четвертую 8 и т. д., все удваивая, пока не дойдутъ до 64-й клѣтки.

Повелитель Индіи не смогъ этого сдѣлать! Число требуемыхъ зеренъ выражалось вышеприведеннымъ двадцатизначнымъ числомъ. Чтобы удовлетворить «скромное» желаніе брамина, нужно было бы **восемь разъ засѣять всю поверхность земного шара** и восемь разъ собрать жатву. Тогда бы только получилось нужное для Сессы количество зеренъ.

Обѣщать «все, что хочешь», легко, но трудно исполнить!

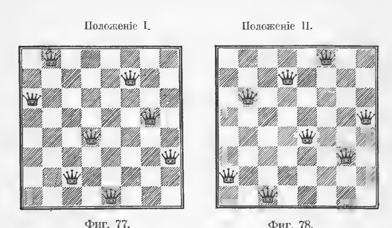
Задача 90-я.

О восьми королевахъ.

На шахматной доскѣ, состоящей изъ 64 клѣтокъ, разставить 8 королевъ такъ, чтобы ни одна изъ нихъ не могла брать другую. Другими словами: на восьми клѣткахъ шахматной доски поставить восемь королевъ такъ, чтобы каждыя двѣ изъ нихъ не были расположены ни на одной линіи, параллельной какому-либо краю, и ни на одной изъ діагоналей доски.

Задача эта нѣкіимъ Наукомъ предложена была для рѣшенія знаменитому нѣмецкому математику Гауссу. Гауссъ послѣ нѣсколькихъ попытокъ нашелъ всѣ ея рѣшенія.

Покажемъ нѣкоторыя рѣшенія (не Гаусса) этой задачи и приведемъ затѣмъ таблицу всѣхъ 92-хъ ея рѣшеній.



Фиг. 77. Фиг. 78.

На прилагаемой фигурѣ 77-й содержится одно изъ рѣшеній.

Обозначимъ это рѣшеніе восемью цифрами **6 8 2 4 1 7 5 3**, гдѣ каждая цифра означаетъ высоту королевы въ каждой колоннѣ доски, т. е. **6** показываетъ, что королева находится въ первой колоннѣ на шестой клѣткѣ, считая снизу, **8**, что коро-

лева находится во второй колоннѣ на восьмой клѣткѣ, считая снизу, и т. д. Мы и впредь вертикальные ряды клѣтокъ будемъ называть **колоннами,** а горизонтальные **линіями.** Линіи мы тоже будемъ обозначать числами отъ 1 до 8 и считать ихъ отъ низа къ верху. Такимъ образомъ, записанное нами выше первое рѣшеніе съ помощью одного ряда чиселъ было бы правильнѣе записать такъ:

(A)	Линіи . .	6	8	2	4	1	7	5	3
	Колонны .	1	2	3	4	5	6	7	8

Если мы повернемъ доску на четверть окружности въ направленіи, обратномъ движенію часовой стрѣлки, то изъ перваго рѣшенія получимъ ему **соотвѣтственное,** которое представлено у насъ на фиг. 78-ой.

Чтобы получить это соотвѣтственное рѣшеніе численно изъ перваго, достаточно расположить колонки таблички (A) такъ, чтобы цифры первой строки шли въ убывающемъ порядкѣ. Получимъ

(B)	Линіи . .	8	7	6	5	4	3	2	1
	Колонны .	2	6	1	7	4	8	3	5

Сохраняя только цифры второй линіи таблички (B), можемъ сокращенно обозначить это рѣшеніе числомъ **2 6 1 7 4 8 3 5.**

Положеніе III.

Фиг. 79.

Положеніе IV.

Фиг. 80.

Слѣдующія 2 фигуры, 79 и 80, представляютъ второе и третье рѣшенія, соотвѣтственныя фигурѣ 77-ой. Ихъ можно по-

лучить, заставляя шахматную доску вращаться еще на четверть и еще на четверть окружности, въ направленіи обратномъ движенію часовой стрѣлки. Можно вывести также, подобно предыдущему (и обозначить численно), положеніе III (фиг. 79) изъ положенія II (фиг. 78), а положеніе IV изъ положенія III. Но можно и прямо положеніе III получить изъ I, а положеніе IV—изъ II-го.

Для этого поступаемъ такъ. Рѣшенія фиг. 77 и 78 обозначены у насъ числами

6 8 2 4 1 7 5 3 и **2 6 1 7 4 8 3 5.**

Напишемъ эти числа въ обратномъ порядкѣ:

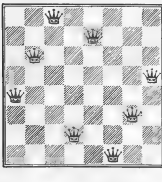
3 5 7 1 4 2 8 6 и **5 3 8 4 7 1 6 2**

и вычтемъ каждую цифру этихъ чиселъ изъ 9, получимъ

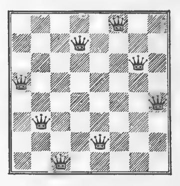
6 4 2 8 5 7 1 3 и **4 6 1 5 2 8 3 7.**

Это и будутъ численныя обозначенія рѣшеній на фигурахъ 79-ой и 80-ой.

Такимъ образомъ въ общемъ случаѣ иныя рѣшенія задачи о королевахъ на нѣкоторой доскѣ даютъ мѣсто четыремъ **соотвѣтственнымъ** рѣшеніямъ. Рѣшенія эти носятъ названіе **непрямыхъ**.



Фиг. 81.



Фиг. 82.

На фигурѣ 81-ой дано **полупрямое** рѣшеніе задачи. Особенность его заключается въ томъ, что изъ него получается только **одно** соотвѣтственное рѣшеніе (фиг. 82). Въ самомъ

дѣлѣ, если повернуть шахматную доску на полуокружность, то получаемъ опять то же расположеніе. Число **4 6 8 2 7 1 3 5**, изображающее это рѣшеніе, отличается тѣмъ, что, сложенное съ числомъ, состоящимъ изъ тѣхъ же цифръ, но написаннымъ въ обратномъ порядкѣ, даетъ **9 9 9 9 9 9 9 9**.

Наконецъ, прямымъ рѣшеніемъ мы назовемъ такое рѣшеніе, изъ котораго нельзя получить новыхъ рѣшеній, поворачивая доску на четверть или на бо́льшее число четвертей окружности. Такихъ рѣшеній не существуетъ для обыкновенной шахматной доски, съ 64-мя клѣтками, хотя для другихъ досокъ они имѣются.

Возьмемъ какое-либо рѣшеніе задачи восьми королевъ и перевернемъ на фигурѣ порядокъ линій, или колоннъ. Или, что̀ сводится къ тому же, напишемъ числовое обозначеніе рѣшенія въ обратномъ порядкѣ,—мы получимъ **рѣшеніе, обратное** данному. Легко убѣдиться, что это рѣшеніе отличается отъ всякаго изъ соотвѣтственныхъ рѣшеній. То же рѣшеніе получается еще и геометрически, если поставить шахматную доску съ 8-ю королевами противъ зеркала и смотрѣть въ это послѣднее, или же вообразить себѣ доску перевернутой. Изъ разсмотрѣнія соотвѣтственныхъ и обратныхъ рѣшеній совмѣстно съ простыми слѣдуетъ:

1. Всякое простое непрямое рѣшеніе даетъ 4 соотвѣтственныхъ рѣшенія и 4 обратныхъ,—всего **восемь** рѣшеній.

2. Всякое простое полупрямое рѣшеніе даетъ два соотвѣтственныхъ и два обратныхъ рѣшенія,—всего **четыре**.

3. Всякое простое прямое рѣшеніе даетъ еще только одно обратное,—всего **два**.

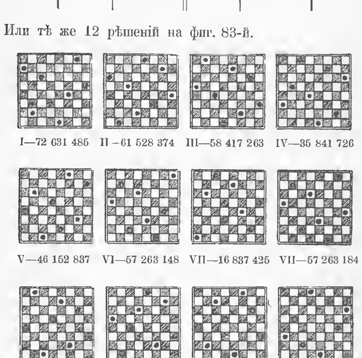
Выведенныя правила относятся ко всякой доскѣ, кромѣ состоящей изъ одной клѣтки.

Опуская способы отысканія самыхъ простѣйшихъ рѣшеній задачи, дадимъ эти рѣшенія прямо. При этомъ замѣтимъ, что

существуетъ **12 простыхъ, первоначальныхъ рѣшеній,** которыя расположены въ слѣдующей табличкѣ.

№ по порядку.	Обозначенія.	№ по порядку.	Обозначенія.
1	72 631 485	7	16 837 425
2	61 528 374	8	57 263 184
3	58 417 263	9	48 157 263
4	35 841 726	10	51 468 273
5	46 152 837	11	42 751 863
6	57 263 148	12	35 281 746

Или тѣ же 12 рѣшеній на фиг. 83-й.



I—72 631 485 II—61 528 374 III—58 417 263 IV—35 841 726

V—46 152 837 VI—57 263 148 VII—16 837 425 VII—57 263 184

IV—48 157 263 X—51 468 273 XI—42 751 863 XII—35 281 746

Фиг. 83.

Всѣ эти простыя рѣшенія непрямыя, и каждое изъ нихъ даетъ, какъ выше объяснено, 8 рѣшеній, послѣднее же, XII-е,— полупрямое и даетъ только четыре рѣшенія. Всего, слѣдовательно, получается 92 рѣшенія. Вотъ таблица всѣхъ этихъ рѣшеній:

Таблица всѣхъ 92-хъ рѣшеній задачи о восьми королевахъ.

1	1586 3724	24	3681 5724	47	5146 8273	70	6318 5247
2	1683 7425	25	3682 4175	48	5184 2736	71	6357 1428
3	1746 8253	26	3728 5146	19	5186 3724	72	6358 1427
4	1758 2463	27	3728 6415	50	5246 8317	73	6372 4815
5	2468 3175	28	3847 1625	51	5247 3861	74	6372 8514
6	2571 3864	29	4158 2736	52	5261 7483	75	6374 1825
7	2574 1863	30	4158 6372	53	5281 4736	76	6415 8273
8	2617 4835	31	4258 6137	54	5316 8247	77	6428 5713
9	2683 1475	32	4273 6815	55	5317 2864	78	6471 3528
10	2736 8514	33	4273 6851	56	5384 7162	79	6471 8253
11	2758 1463	34	4275 1836	57	5713 8642	80	6824 1753
12	2861 3574	35	4285 7163	58	5714 2863	81	7138 6425
13	3175 8246	36	4286 1357	59	5724 8136	82	7241 8536
14	3528 1746	37	4615 2837	60	5726 3148	83	7263 1485
15	3528 6471	38	4682 7135	61	5726 3184	84	7316 8524
16	3571 4286	39	4683 1752	62	5741 3862	85	7382 5164
17	3584 1726	40	4718 5263	63	5841 3627	86	7425 8136
18	3625 8174	41	4738 2516	64	5841 7263	87	7428 6135
19	3627 1485	42	4752 6138	65	6152 8374	88	7531 6824
20	3627 5184	43	4753 1682	66	6271 3584	89	8241 7536
21	3641 8572	44	4813 6276	67	6275 4853	90	8253 1746
22	3642 8571	45	4815 7263	68	6317 5824	91	8316 2574
23	3681 4752	46	4853 1726	69	6318 4275	92	8418 6275

Замѣтимъ, что таблица эта содержитъ:

4	рѣшенія,	начинающіяся	или оканчивающіяся	цифрами	1	или	8
8	рѣшеній,	»	»	»	2	»	7
16	»	»	»	»	3	»	6
18	»	»	»	»	4	»	5

Въ приведенной таблицѣ всѣ рѣшенія расположены въ числовомъ порядкѣ. Таблицу эту можно построить самому, пользуясь при этомъ слѣдующимъ весьма простымъ систематическимъ пріемомъ: Помѣщаютъ сначала одну королеву на самую низкую клѣтку первой колонны слѣва, затѣмъ ставятъ дру-

гую королеву во второй колоннѣ опять на самую низкую по возможности клѣтку и т. д., всегда стремясь помѣстить въ слѣдующей колоннѣ королеву настолько низко, насколько это позволяютъ королевы, стоящія слѣва. Когда наступитъ такой моментъ, что въ колоннѣ нельзя помѣстить королеву,—подымаютъ королеву въ предыдущей колоннѣ на одну, двѣ, три... клѣтки и продолжаютъ размѣщать остальныхъ королевъ, руководствуясь всегда разъ принятымъ правиломъ: не поднимать поставленныхъ королевъ выше, какъ только въ томъ случаѣ, если справа нѣтъ совсѣмъ мѣста для слѣдующей королевы.

Всякій разъ, когда рѣшеніе найдено, его записываютъ, и, такимъ образомъ, рѣшенія будутъ слѣдовать одно за другимъ тоже въ постепенномъ числовомъ порядкѣ. Таблицу, полученную такимъ путемъ, можно провѣрять, группируя соотвѣтственныя и обратныя рѣшенія, которыя можно вывести изъ перваго, и т. д.

Задача 91-я.

О ходѣ шахматнаго коня.

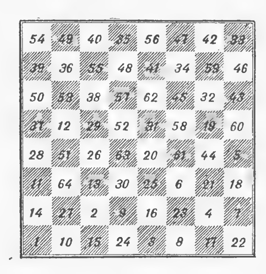
Задача о ходѣ шахматнаго коня, или задача Эйлера, состоитъ въ слѣдующемъ:

Требуется обойти конемъ всѣ 64 клѣтки шахматной доски такъ, чтобы на каждой клѣткѣ конь былъ только одинъ разъ и затѣмъ возвратился бы въ клѣтку, изъ которой вышелъ.

Задачей этой занимался Эйлеръ и въ письмѣ къ Гольдбаху (26 апрѣля 1757 года) далъ одно изъ рѣшеній ея. Вотъ что, между прочимъ, пишетъ онъ въ этомъ интересномъ письмѣ:

«...Воспоминаніе о предложенной когда-то мнѣ задачѣ послужило для меня недавно поводомъ къ нѣкоторымъ тонкимъ изысканіямъ, въ которыхъ обыкновенный анализъ, какъ кажется, не имѣетъ никакого примѣненія. Вопросъ состоитъ въ слѣдующемъ. Требуется обойти шахматнымъ конемъ всѣ 64 клѣтки шахматной доски такъ, чтобы на каждой клѣткѣ онъ побывалъ только одинъ разъ. Съ этой цѣлью всѣ мѣста, которыя занималъ конь, при своихъ (послѣдовательныхъ) ходахъ, закрыва-

лись марками. Но къ этому присоединилось еще требованіе, чтобы начало хода дѣлалось съ даннаго мѣста. Это послѣднее условіе казалось мнѣ очень затрудняющимъ вопросъ, такъ какъ я скоро нашелъ нѣкоторые пути, при которыхъ, однако, выборъ начала былъ для меня свободенъ. Я утверждаю, однако, что если полный обходъ коня будетъ возвратный (in se rediens), т. е. если конь изъ послѣдняго мѣста опять можетъ перейти на первое, то устраняется и это затрудненіе. Послѣ нѣкоторыхъ изысканій по этому поводу я нашелъ, наконецъ, ясный способъ находить сколько угодно подобныхъ рѣшеній (число ихъ, однако, не безконечно), не дѣлая пробъ. Подобное рѣшеніе представлено въ нижеслѣдующей фигурѣ (84-ой).



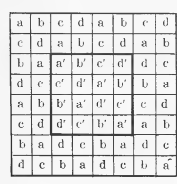
Фиг. 84.

«Конь ходитъ въ порядкѣ, указанномъ числами. Такъ какъ изъ послѣдняго мѣста **64** онъ можетъ перейти на № 1, то этотъ полный ходъ есть возвратный (in se rediens).

Таково рѣшеніе задачи о ходѣ шахматнаго коня, данное Эйлеромъ. Въ письмѣ не указаны ни пріемы, ни путь, которыми знаменитый ученый пришелъ къ своему открытію. Сейчасъ мы укажемъ на пріемы иныхъ, болѣе симметричныхъ и методичныхъ рѣшеній.

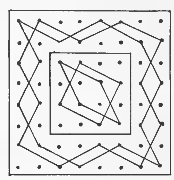
I.

Раздѣлимъ шахматную доску на двѣ части: **внутреннюю,** состоящую изъ 16-ти клѣтокъ, и **краевую,** представляющую собою родъ бордюра, шириною въ двѣ клѣтки (фиг. 85). Каждыя 12 клѣтокъ краевой доски, обозначенныя у насъ одинаковыми буквами, даютъ одинъ изъ частныхъ зигзагообразныхъ ходовъ шахматнаго коня вокругъ доски; точно такъ же четыре одноименныхъ клѣтки внутренней части доски даютъ частный замкнутый ходъ шахматнаго коня въ видѣ квадрата или въ видѣ ромба. Фиг. 86-я представляетъ 2 зигзагообразныхъ частныхъ



a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	a′	b′	c′	d′	d	c
d	c	c′	d′	a′	b′	b	a
a	b	b′	a′	d′	c′	c	d
c	d	d′	c′	b′	a′	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a

Фиг. 85.



Фиг. 86.

хода коня на **краевой** части доски. Эти ходы обозначимъ буквами *a* и *b*. Тамъ же начерчены и два хода на **внутренней** части доски. Эти ходы назовемъ a' и b' соотвѣтственно обозначенiямъ на фиг. 85-й.

Закончивъ какой-либо частный круговой ходъ по **краевой** части доски, конь можетъ перескочить на любой изъ трехъ ходовъ **другого** наименованiя на **внутренней** части доски. Нетрудно (стоитъ лишь взять въ руки шахматную доску и коня) найти, и притомъ различными способами, четыре пути изъ 16 клѣтокъ—такихъ, напр., какъ

$$ab',\ bc',\ cd',\ da'.$$

Въ самомъ дѣлѣ, всмотритесь въ данныя выше фигуры 85 и 86, или поставьте предъ собой шахматную доску, и вы уви-

дите, что для полученія частнаго хода коня въ 16 клѣтокъ, надо только **краевой** частный круговой ходъ изъ 12-ти клѣтокъ соединить съ **внутреннимъ** ходомъ, но **другого** наименованія прямой чертой, уничтожая при этомъ въ каждомъ изъ частныхъ круговыхъ (возвратныхъ) ходовъ замыкающую линію. Такъ получимъ 4 частныхъ круговыхъ хода по 16-ти клѣтокъ. Эти четыре частныхъ хода по 16-ти клѣтокъ опять можно соединить различнымъ образомъ и получить полный ходъ шахматнаго коня въ 64 клѣтки.

Итакъ, ставятъ коня на какую-либо клѣтку, напр., **краевой** части доски и описываютъ по ней путь изъ 12 клѣтокъ; вслѣдъ затѣмъ конь перепрыгиваетъ на клѣтку одного изъ трехъ **(не одноименныхъ) внутреннихъ** путей, проходитъ этотъ путь въ любомъ направленіи и перескакиваетъ опять на краевую часть, гдѣ снова дѣлаетъ слѣдующій частный зигзагообразный ходъ изъ 12 клѣтокъ, вновь перескакиваетъ на одинъ изъ внутреннихъ, не одноименныхъ съ предыдущимъ путей, описываетъ его, переходитъ опять на новый краевой путь и т. д., пока не обойдетъ всѣхъ 64 клѣтокъ.

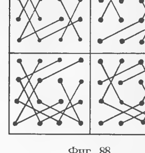
Способъ рѣшенія задачи настолько простъ и легокъ, что не нуждается въ болѣе подробныхъ разъясненіяхъ и указаніяхъ.

II.

Можно эту же задачу рѣшить и другимъ, не менѣе легкимъ, пріемомъ. Здѣсь, для удобства, доска дѣлится на 4 части по 16 клѣтокъ въ каждой, двумя медіанами (серединными линіями). (См. фиг. 87). 16 клѣтокъ каждой четверти, обозначенныхъ одинаковыми буквами, можно соединить посредствомъ сторонъ двухъ квадратовъ и двухъ ромбовъ, не имѣющихъ ни одной общей вершины (см. фиг. 88). Соединяя, въ свою очередь, одноименные квадраты и ромбы всѣхъ четвертей доски, можно получить четыре частныхъ круговыхъ возвратныхъ хода, по 16 клѣтокъ. Соединяя, затѣмъ, эти послѣдніе ходы, получимъ полный ходъ коня въ 64 клѣтки.

a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a
a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a

Фиг. 87.



Фиг. 88.

Полезно сдѣлать еще слѣдующія замѣчанія: На каждой четверти доски ромбами и квадратами обозначены по четыре хода коня. Если соединимъ ромбы и квадраты, обозначенные одинаковыми буквами во всѣхъ 4-хъ четвертяхъ доски, получимъ по 4 частныхъ возвратныхъ хода по 16 клѣтокъ.

Нѣкоторыя трудности иному могутъ представиться, когда для полученія полнаго хода въ 64 клѣтки онъ начинаетъ соединять между собой эти четыре частныхъ хода по 16 клѣтокъ. Здѣсь полезно имѣть въ виду, что *цѣпь, или рядъ ходовъ, можно видоизмѣнять, не разрывая его.* Основано это на такъ называемомъ правилѣ Бертрана (изъ Женевы), которое состоитъ въ слѣдующемъ:

Пусть имѣемъ незамкнутую цѣпь ходовъ, проходящихъ черезъ клѣтки A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, и пусть оконечности этой цѣпи будутъ A и L. Если клѣтка, напр., D, отличная отъ предпослѣдней K, находится отъ послѣдней L на разстояніи хода коня, то DE можно замѣнить черезъ DL и цѣпь ходовъ обратится въ

$$ABCDLKJIHGFE,$$

т. е. вторая половина цѣпи будетъ пройдена въ обратномъ порядкѣ.

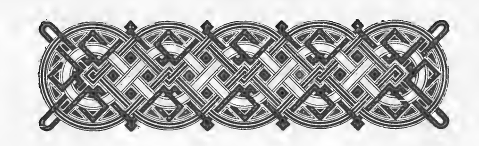
То же самое относится и къ тому случаю, когда какая-либо клѣтка, кромѣ второй, сообщается ходомъ коня съ первой.

Итакъ, цѣпь, или рядъ, ходовъ можно видоизмѣнять, не разрывая ее.

Число путей, которыми конь можетъ обойти доску и которые можно найти указанными выше пріемами, не безконечно. Но оно настолько огромно, что трудно его представить. Вотъ что на этотъ счетъ говоритъ одинъ изъ математиковъ, Лавернедъ: «Я занимался числомъ рѣшеній, которое можетъ дать эта задача,—писалъ онъ, —и хотя мой трудъ не конченъ, тѣмъ не менѣе я могу утверждать, что, помѣщая 50 путей на страницѣ, понадобилось бы *не менѣе десяти тысячъ стопъ бумаги,* чтобы написать ихъ всѣ»!..

Этими бѣглыми указаніями рѣшеній задачи о ходѣ шахматнаго коня мы и ограничимся, предоставляя желающимъ заняться этой задачей подробнѣй обратиться къ спеціальнымъ сочиненіямъ.





Карты.

Кажется, ни одна игра не пользуется бо́льшимъ распространенiемъ среди современнаго человѣчества, какъ игра въ карты. Эти послѣднiя вы можете встрѣтить чуть не въ каждомъ домѣ, особенно въ Россiи. Очень жаль только, что во многихъ случаяхъ, вмѣсто прiятныхъ и развивающихъ сообразительность игръ, картами пользуются для игры на деньги, «играютъ» также въ глупыя азартныя игры, убывающiя время, деньги и разстраивающiя нервы.

Мы, впрочемъ, воспользуемся здѣсь колодой картъ, какъ пользуемся ими и всюду, для другой цѣли для интересныхъ задачъ и математическихъ развлеченiй. Съ *колодой* игральныхъ или игрушечныхъ картъ въ рукахъ можно провести время нескучно и съ пользой какъ для себя, такъ и для другихъ. Вообще, во многихъ случаяхъ карты могутъ быть незамѣнимымъ и дешевымъ пособiемъ для объясненiя многихъ математическихъ вопросовъ и комбинацiй.

Описывать, что такое карты, какъ полная колода картъ (52 карты) дѣлится на *масти*, какъ называются эти масти и какъ называется каждая карта въ отдѣльности,—кажется, излишне. Ужъ навѣрное читатель этой книжки, кто бы и какого бы возраста онъ ни былъ, знаетъ это и играетъ,—ну хоть въ «дурачки» или «мельника»...

Кѣмъ, какъ, гдѣ и когда изобрѣтены карты? Объ этомъ ничего достовѣрно мы не знаемъ. Во всякомъ случаѣ невѣрно то, что карты изобрѣтены, будто бы, во Франціи въ средніе вѣка для развлеченія какого-то скучающаго короля. Скорѣе всего карты — изобрѣтеніе китайцевъ, въ книгахъ которыхъ есть упоминаніе о картахъ въ 1120 году. Въ Европѣ карты стали извѣстны со времени Крестовыхъ походовъ. Какъ бы то ни было, въ Италіи игра въ карты уже существовала въ 1379 году, о чемъ есть упоминаніе въ книгѣ одного тогдашняго художника. Въ Россіи карты появились въ XVII столѣтіи и скорѣе всего пришли къ намъ черезъ Малороссію. И нужно сказать, что несмотря на жестокія преслѣдованія и гоненія вначалѣ (а скорѣе,— благодаря этимъ гоненіямъ) разнаго сорта глупыя и азартныя «игры» привились у насъ очень быстро.

Мы, повторяемъ, постараемся здѣсь дать картамъ болѣе благородное и полезное назначеніе — пособія для развитія сообразительности и счета, такъ называемой «смекалки»... Не продѣлывалъ ли въ вашемъ присутствіи кто-либо съ помощью картъ различнѣйшіе, иногда прямо изумительные, фокусы? Быть можетъ, вы сами знаете какіе-либо изъ этихъ фокусовъ и развлекаете ими иногда вашихъ знакомыхъ? Но «фокусы» въ большинствѣ случаевъ основаны на ловкости, или просто-таки на «отводѣ глазъ» и обманѣ присутствующихъ.

Мы же займемся здѣсь нѣсколько иными «фокусами», сводящимися къ самымъ настоящимъ математическимъ задачамъ, развивающимъ сообразительность и счетъ. Не пожалѣйте свободнаго времени на то, чтобы съ колодой картъ въ рукахъ усвоить себѣ хорошенько предлагаемыя ниже задачи, а главное разобраться въ нихъ. У васъ въ распоряженіи отличное средство для развитія присущаго всякому человѣку правильнаго математическаго или, что то же,—логическаго мышленія.

Разобравшись и овладѣвши сущностью каждой предлагаемой задачи, вы будете въ состояніи всячески разнообразить ихъ, увеличивать ихъ интересъ и, наконецъ, придумывать новыя подобныя же задачи и развлеченія. Математика — неисчерпаема.

Задача 92-я.

Угадать, сколько очковъ заключается въ трехъ взятыхъ кѣмъ-либо картахъ?

Рѣшеніе.

Изъ полной колоды въ 52 карты пусть кто-либо возьметъ три карты и оставитъ у себя. Чтобы узнать, не глядя, сколько очковъ заключается въ этихъ трехъ картахъ, поступаютъ такъ.

Просятъ взявшаго три карты прибавить къ каждой взятой имъ картѣ по стольку *картъ*, чтобы *вмѣстѣ съ очками каждой взятой карты получалось 15* (Всѣ фигуры вообще считаются за 10). Послѣ этого угадывающему остается только взять остальныя карты, сосчитать ихъ число (лучше всего сдѣлать этотъ счетъ незамѣтно, заложивъ, напримѣръ, руки съ картами за спину), отнять отъ полученнаго числа 4, и получится точная сумма очковъ взятыхъ 3-хъ картъ.

Пусть, *напримѣръ*, кто-либо взялъ четверку, семерку и девятку. Тогда къ четверкѣ онъ долженъ онъ приложить 11 картъ, къ семеркѣ 8 картъ и къ девяткѣ 6 картъ. Отъ колоды останется 24 карты. Отнимая отъ 24-хъ четыре, находимъ, что сумма очковъ взятыхъ 3-хъ картъ должна быть равна 20, что и согласуется съ дѣйствительностью.

Доказательство.

Докажемъ правильность нашего рѣшенія задачи.

Положимъ, что выбранныя кѣмъ-либо карты суть три наименьшія, т. е. три туза, считаемые по 1. Тогда очевидно, что для полученія числа 15 нужно къ каждой взятой картѣ прибавить еще по 14 картъ. Всего, значитъ, съ тремя тузами составится 45 картъ, и отъ колоды въ 52 карты останется только 7 картъ. Если, теперь, отъ 7 отнять 4, то и получится 3, т. е. число очковъ взятыхъ трехъ тузовъ. Но не трудно показать, что **всегда** достаточно отнять 4 отъ числа остающихся картъ, чтобы узнать число всѣхъ очковъ любыхъ 3-хъ взятыхъ картъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если взять 3 другія высшія карты, то на сколько увеличится число ихъ очковъ, на столько именно уменьшится число тѣхъ картъ, которыя нужно добавлять къ каждой взятой, чтобы получить число 15, и на столько же именно увеличится число остающихся картъ. Такъ что, отнимая отъ числа остающихся картъ 4, получимъ остатокъ, который всегда равенъ числу очковъ трехъ выбранныхъ картъ. Напримѣръ, если вмѣсто туза возьмемъ шестерку, то сумма трехъ взятыхъ картъ (полагая, что двѣ остальныя—тузы) будетъ 8, т. е. увеличится на 5. Но зато къ шестеркѣ для полученія числа 15 нужно прибавлять не 14, а только 9 картъ, т. е. на 5 картъ меньше. Значитъ остатокъ картъ увеличится на 5 картъ, и, отнимая отъ этого остатка 4, получимъ опять точную сумму очковъ всѣхъ взятыхъ картъ и т. д.; такимъ образомъ доказывается правильность рѣшенія данной задачи для всякаго случая.

Если кто заинтересуется настоящей задачей и захочетъ болѣе серьезно обслѣдовать ее, то пусть онъ разберется въ предлагаемомъ сейчасъ ниже другомъ, болѣе общемъ, поясненіи задачи.

Пусть   обозначаетъ число всѣхъ картъ, a, b, c числа очковъ въ трехъ выбранныхъ картахъ и p число, которое получается, если къ каждому изъ количествъ a, b и c прибавить нѣкоторое число картъ, каждая изъ которыхъ считается за 1. Число картъ, которыя прибавляются къ a, b и c, суть $p-a$, $p-b$, $p-c$. Если къ этимъ числамъ прибавитъ три первоначально взятыя карты, да число оставшихся картъ, которое обозначимъ черезъ r, то и получимъ всѣ карты, числомъ n, т. е.

$$(p-a)+(p-b)+(p-c)+3+r=n.$$

Откуда, раскрывая скобки и перенося члены, получаемъ:

$$a+b+c=r+(3p+3)-n.$$

Для $n=52$ и $p=15$ имѣемъ $a+b+c=r-4$.

Для $n=32$ и $p=15$ имѣемъ $a+b+c=r+16$.

Изъ этого общаго рѣшенія можно вывести слѣдующее правило:

Утройте число, которое получается отъ прибавленія ко взятымъ тремъ картамъ еще картъ, и прибавьте къ

этому числу 3. Затѣмъ возьмите разницу между этой суммой и числомъ всѣхъ картъ и прибавьте ее къ числу оставшихся картъ, или вычтите ее изъ этого числа, смотря по тому, будетъ ли полученная сумма больше или меньше всего числа картъ. Такимъ образомъ всегда получите число всѣхъ очковъ взятыхъ кѣмъ-либо трехъ картъ.

Замѣтимъ, между прочимъ, что для $n = 36$ и $p = 11$ получается $3p + 3 - n = 0$, а значитъ

$$a + b + c = r.$$

Замѣчаніе I. Изъ предыдущаго можно заключить, что нѣтъ необходимости добавлять къ каждой изъ 3-хъ выбранныхъ картъ столько именно картъ, чтобы получить одно и то же число p. Можно вмѣсто этого предлагать добирать къ каждой изъ взятыхъ трехъ картъ еще по столько картъ такъ, чтобы получилось 3 какихъ-либо числа q, s, t, и тогда въ выведенную раньше формулу вмѣстѣ $3p$ нужно поставить сумму $q + s + t$.

Замѣчаніе II. Если вмѣсто трехъ картъ предлагать взять 4, то формула приметъ видъ:

$$a + b + c + d = r + (4p + 4) - n.$$

Если предлагать взять пять картъ, получится

$$a + b + c + d + e = r + (5p + 5) - n$$

и т. д.

Замѣчаніе III. Можетъ случиться, что не хватитъ картъ для того, чтобы составить число p съ каждой изъ взятыхъ картъ. Тогда спрашиваютъ число q, котораго недостаетъ, и поступаютъ далѣе такъ, какъ если бы всѣхъ картъ было $n + q$ при остаткѣ r, равномъ нулю.

Задача 93-я.

Нѣкоторое число картъ разложено въ ряды. Угадать задуманную кѣмъ-либо карту.

Рѣшеніе.

Возьмите 15 картъ и разложите ихъ въ три ряда по 5 картъ въ каждомъ. Пусть кто-либо задумаетъ одну какую-нибудь изъ этихъ картъ и укажетъ только **рядъ,** въ которомъ находится эта карта. Послѣ этого соберите карты каждаго ряда и затѣмъ сложите всѣ карты вмѣстѣ такъ, однако, чтобы **указанный рядъ непремѣнно попалъ въ середину**—между картами двухъ остальныхъ рядовъ. Потомъ снова разложите карты въ три ряда въ такомъ порядкѣ: одну карту положите въ первый рядъ, вторую—во второй, третью—въ третій, четвертую—въ первый, пятую—во второй, 6-ю—въ третій, 7-ю—въ первый и т. д. до тѣхъ поръ, пока не разложите всѣхъ картъ.

Разложивъ карты, спросите опять, въ какомъ ряду находится задуманная карта; опять соберите карты всѣхъ трехъ рядовъ и сложите ихъ вмѣстѣ, наблюдая снова, чтобы тотъ рядъ, гдѣ находится задуманная карта, **непремѣнно** былъ посреди между двухъ рядовъ, и снова разложите въ 3 ряда карты такъ, какъ уже указано выше (при второй раскладкѣ).

Спросивъ теперь, въ какомъ ряду находится задуманная карта, можно тотчасъ указать ее: **она будетъ третьей по порядку въ этомъ ряду.**

Чтобы лучше замаскировать задачу, можно совершенно такъ же, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, еще разъ разложить карты, и тогда задуманная кѣмъ-либо карта непремѣнно будетъ въ среднемъ ряду третьей, т. е. въ серединѣ всѣхъ 15 картъ. Такъ что, съ какого бы угла ни начать считать,—она всегда окажется на восьмомъ мѣстѣ.

Доказательство.

Чтобы убѣдиться въ вѣрности нашего рѣшенія, достаточно показать, что, если раскладывать 3 раза карты, какъ указано, то послѣ третьей раскладки задуманная карта будетъ непремѣнно третьей въ томъ ряду, гдѣ она находится. Въ самомъ дѣлѣ, когда мы раскладываемъ карты въ первый разъ и намъ укажутъ рядъ, въ которомъ находится задуманная карта, то уже извѣстно, что

она есть **одна изъ 5 картъ** этого указаннаго ряда. Помѣщая тотъ рядъ, гдѣ находится задуманная карта, между 2-мя остальными рядами и раскладывая карты, какъ указано, во второй разъ, не трудно опредѣлить, гдѣ будутъ находиться тѣ пять картъ, между которыми находится задуманная карта:

1. Одна	упадетъ	на	2-е	мѣсто	третьяго	ряда
2. Другая	»	»	3-е	»	перваго	»
3. Третья	»	»	3-е	»	второго	»
4. Четвертая	»	»	3-е	»	третьяго	»
5. Пятая	»	»	4-е	»	перваго	»

Обозначая черезъ 0 карты тѣхъ рядовъ, гдѣ нѣтъ задуманной карты, а черезъ 1 карты того ряда, гдѣ находится задуманная карта, находимъ, что послѣ второй раскладки карты расположатся такъ:

1-й рядъ.	2-й рядъ.	3-й рядъ.
0	0	0
0	0	1
1	1	1
1	0	0
0	0	0

Слѣдовательно, если задуманная карта находится въ первомъ ряду, то ясно, что это или 3-я или 4-я карта этого ряда. Поэтому, при перекладыванiи картъ еще разъ такъ, какъ указано, задуманная карта упадетъ на третье мѣсто второго или третьяго ряда. Если послѣ второй раскладки окажется, что задуманная карта находится во второмъ ряду, то ясно, это есть третья карта этого ряда, и что послѣ слѣдующей раскладки она опять упадетъ на то же мѣсто. Наконецъ, если задуманная карта будетъ въ третьемъ ряду, то ясно, что это одна изъ двухъ этого ряда, 2-я или 3-я, и послѣ третьей раскладки она будетъ третьей въ первомъ или во второмъ ряду.

Напоминаю еще разъ, что всѣ эти доказательства надо усвоивать съ картами въ рукахъ, хотя они и очень не трудны. Кромѣ того, всегда необходимо разбираться въ томъ, что общее и что частное. Только что приведенное доказательство, напри-

мѣръ, относится, очевидно, только къ данному случаю и къ данному числу картъ (15). Оно не показываетъ, можно ли, вообще, при нечетномъ числѣ картъ, расположенныхъ въ нечетное число равныхъ рядовъ, прійти къ тому, чтобы задуманная карта находилась въ серединѣ игры.

Поэтому, если захотите, попытайтесь разобраться въ слѣдующемъ болѣе общемъ доказательствѣ. Оно тоже не трудно.

Другое доказательство.

Пусть будетъ **n** число картъ каждаго ряда и **t** число рядовъ. Задуманная карта пусть находится сначала въ числѣ **n** картъ **средняго** ряда. При слѣдующей раскладкѣ эти **n** картъ распредѣлятся въ **t** рядахъ; и если **n**, дѣленное на **t**, даетъ цѣлое частное **e**, то карты, въ числѣ которыхъ находится задуманная, распредѣлятся въ **t** рядахъ поровну, образуя группу въ **e** картъ въ серединѣ каждаго ряда. Напр., при 27-ми картахъ:

1-я раскладка картъ.			2-я раскладка картъ.		
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0

То же самое получится, если частное **e** дѣлится также на **t**, а также если полученное новое частное **f** тоже дѣлится на **t** и т. д. Такимъ образомъ задуманная карта всегда находится въ группѣ, занимающей середину взятой раскладки картъ, если только она задумана изъ того ряда, который былъ среднимъ при первой раскладкѣ.

Итакъ, если дѣленія на **t** совершаются безъ остатка до тѣхъ поръ, пока не получится частное **1**, то какая-либо карта, задуманная изъ средняго ряда, въ концѣ концовъ попадетъ въ

середину этого средняго ряда. И когда угадывающій послѣ нѣсколькихъ раскладокъ скажетъ, что задуманная имъ карта находится опять въ среднемъ ряду, то вы тотчасъ же можете ее указать.

То же самое, впрочемъ, относится и къ случаю, когда указанныя выше дѣленія не совершаются нацѣло (безъ остатка). Тогда получаются такіе поперечные ряды, въ которыхъ встрѣчаются карты двухъ рядовъ (т. е. изъ того ряда, въ которомъ задумана карта, и изъ другого). Такъ, напр., для $t=5$ и $n=9$ можемъ имѣть:

1-я раскладка картъ.					2-я раскладка картъ.				
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Но очевидно, что и здѣсь послѣ ряда соотвѣтствующихъ раскладокъ мы придемъ къ тому, что задуманная карта, въ концѣ концовъ, будетъ въ самой серединѣ взятыхъ картъ.

Общее замѣчаніе.

Усвоивъ хорошо общія основанія предыдущей карточной задачи, не трудно всячески разнообразить ее со всякимъ числомъ картъ. Все дѣло заключается только въ томъ, чтобы карты одного какого-либо ряда посредствомъ другого расположенія ихъ отдѣлились и размѣстились въ разные ряды. Легко показать и объяснить это на самомъ простомъ примѣрѣ. Взявъ, наприм., 16 картъ и расположивъ ихъ въ два ряда по 8-ми картъ, спросите кого-либо, въ какомъ ряду находится задуманная имъ карта. Тогда вы уже знаете, что задуманная карта есть **одна изъ восьми**.

Взявъ, затѣмъ каждый рядъ отдѣльно и располагая опять карты въ такомъ порядкѣ: одна въ первомъ ряду, другая во второмъ, третья въ первомъ, четвертая во второмъ и т. д., не трудно видѣть, что изъ этихъ 8 картъ, гдѣ находилась задуманная карта, 4 упадутъ въ одинъ рядъ и 4 въ другой.

Итакъ, если намъ укажутъ, въ какомъ ряду находится задуманная карта, то вы знаете, что она есть **одна изъ 4-хъ** извѣстныхъ картъ. Перекладывая соотвѣтственно карты, опять найдете, что задуманная карта будетъ одной изъ 2-хъ извѣстныхъ картъ, и т. д., пока, наконецъ, не укажете задуманной карты.

Задача 94-я.

Угадать задуманную пару картъ.

Поясненіе.

Предыдущую карточную задачу можно видоизмѣнить слѣдующимъ интереснымъ образомъ. Возьмемъ такое число картъ, которое было бы равно произведенію множителей, представляющихъ два послѣдовательныхъ (отличающихся другъ отъ друга на одну единицу) числа.

То есть надо брать или $3 \times 4 = 12$, или $4 \times 5 = 20$, или $5 \times 6 = 30$, или $6 \times 7 = 42$ карты. Разложимъ затѣмъ всѣ эти карты въ рядъ **по двѣ** и попросимъ кого-либо замѣтить любую *пару* рядомъ лежащихъ картъ. Складываемъ всѣ взятыя карты, наблюдая, чтобы всѣ парныя карты лежали другъ за другомъ; а затѣмъ раскладываемъ ихъ въ прямоугольникъ, наблюдая такой порядокъ: сначала кладемъ три карты по порядку одна возлѣ другой, четвертую подъ первой, пятую возлѣ третьей, 6-ю подъ 4-й, 7-ю возлѣ пятой, 8-ю подъ 6-й и т. д. до тѣхъ поръ, пока число картъ, которыя кладутъ рядомъ одна возлѣ другой, не будетъ равно большему множителю (или, иначе, числу, выражающему большую сторону прямоугольника), а число картъ, положенныхъ одна подъ другой, не будетъ равно меньшему множителю. Лучше всего въ данномъ случаѣ способъ раскладки картъ пояснить на примѣрѣ. Пусть взято 20 картъ (т. е. 4×5). Обозначимъ эти карты по порядку такъ: 1, 2, 3,..., 20.

Рѣшеніе.

Разложимъ карты по парамъ, дадимъ замѣтить кому-либо любую пару, затѣмъ сложимъ и будемъ раскладывать въ прямоугольникъ. Разложеніе, какъ объяснено выше, должно происходить въ слѣдующемъ порядкѣ (см. фиг. 89):

A	1	2	3	5	7	*B*
C	4	9	10	11	13	*D*
E	6	12	15	16	17	*F*
G	8	14	18	19	20	*H*

Фиг. 89.

Послѣ этого спросимъ, въ какомъ ряду, или въ какихъ рядахъ находится задуманная кѣмъ-либо пара картъ, или, по нашему обозначенію, пара чиселъ (при чемъ ряды считаются горизонтально, какъ указано буквами,—т. е. первый рядъ есть *AB*, второй *CD*, третій *EF*, четвертый *GH*). Положимъ, укажутъ, что оба числа находятся въ **одномъ ряду**, напр., третьемъ. Тогда можно быть увѣреннымъ, что оба эти числа (или карты) находятся **рядомъ**, и первое изъ нихъ занимаетъ третье же мѣсто въ этомъ ряду, т. е. въ данномъ случаѣ задуманныя числа (карты) будутъ 15 и 16.

Необходимо для вѣрнаго рѣшенія задачи замѣтить числа (карты) 1 и 2 перваго ряда, 9 и 10 второго, 15 и 16—третьяго, 19 и 20—четвертаго. Эти числа (или карты) можно назвать **ключомъ** задачи, и при помощи ихъ опредѣляются числа (карты) не только въ томъ случаѣ, когда они находятся въ одномъ ряду, но и въ томъ, когда они находятся въ двухъ различныхъ рядахъ. Въ этомъ случаѣ, когда указаны ряды, въ которыхъ находятся задуманныя числа (карты), нужно взять **ключъ** указаннаго высшаго ряда и **подъ** первымъ числомъ этого ключа въ указанномъ нижнемъ ряду найдемъ одно задуманное число

(карту), а въ **сторонѣ** отъ второго числа (карты) ключа на такомъ же разстояніи найдемъ второе задуманное число (карту). Напр., пусть задуманныя карты будутъ 7 и 8. Тогда скажутъ, что одна находится въ 1-мъ ряду, а другая въ 4-мъ. Беремъ, значитъ, ключъ перваго ряда, 1 и 2. Подъ 1 въ нижнемъ ряду, т. е. на третьемъ мѣстѣ, находится 8, а за вторымъ числомъ ключа, 2, находится на третьемъ мѣстѣ 7. Слѣдовательно, получаются задуманныя числа (карты).

Пусть еще скажутъ, что задуманныя числа находятся во второмъ и четвертомъ ряду. Беремъ первое число ключа 2-го ряда (т. е. 9), подъ нимъ въ четвертомъ ряду число 14,— это и есть одно изъ задуманныхъ чиселъ, на такомъ же разстояніи вправо отъ второго числа ключа, 10, находится 13,— это и есть другое задуманное число (или карта).

Почему все это такъ, а не иначе, — ясно изъ принятаго способа раскладки картъ. Ясно также, что изъ чиселъ (картъ), взятыхъ по парамъ, въ каждомъ ряду можетъ находиться только по одной парѣ (именно пара, входящая въ **ключъ** раскладки). Изъ всѣхъ же остальныхъ паръ, если одно число (или карта) будетъ въ одномъ ряду, то другое будетъ въ другомъ, и чтобы угадать ихъ, необходимо только правильно разложить карты и поступать, какъ объяснено выше.

Для 30 картъ раскладка имѣетъ слѣдующій видъ (фиг. 90):

1	2	3	5	7	9
4	11	12	13	15	17
6	14	19	20	21	23
8	16	22	25	26	27
10	18	24	28	29	30

Фиг. 90.

Для 42 картъ имѣемъ (фиг. 91):

1	2	3	5	7	9	11
4	13	14	15	17	19	21
6	16	23	24	25	27	29
8	18	26	31	32	33	35
10	20	28	34	37	38	39
12	22	30	36	40	41	42

Фиг. 91.

Очевидно, что въ данной задачѣ можно предоставить угадывать пары картъ не только одному, но нѣсколькимъ лицамъ. Затѣмъ, разложивши указаннымъ способомъ карты въ прямоугольникъ, спрашивать каждаго, въ которомъ ряду находятся задуманныя имъ карты, и указывать ихъ по соотвѣтствующему ключу, который для каждой раскладки легко опредѣлить, руководясь изложенными выше правилами.

Задача 95-я.

Изъ нѣсколькихъ взятыхъ картъ, или изъ цѣлой колоды, угадать ту, которую кто-либо задумалъ.

Рѣшеніе.

Возьмите нѣсколько картъ, или всю колоду, если хотите, и показывайте ихъ по порядку задумывающему карту. Число картъ, которымъ вы пользуетесь при этой задачѣ, должно быть вамъ напередъ извѣстно. Показавъ, не глядя, всѣ карты и сложивъ ихъ въ томъ же порядкѣ, вы спрашиваете задумывающаго: **какую по порядку** изъ показанныхъ картъ онъ задумалъ (т. е. первую ли, вторую, третью, четвертую и т. д.)? Затѣмъ объявите, что, считая карты извѣстнымъ образомъ, вы

откроете карту на томъ числѣ, которое вамъ угодно (оно должно быть, однако, равно или числу картъ, взятыхъ вами, или бо̀льшему числу). Чтобы достигнуть этого, вы спрашиваете, какая карта по порядку задумана партнеромъ. Положимъ, что у васъ 20 картъ, онъ скажетъ, что задумана имъ 7-я карта, а вы объявите, что откроете задуманную карту на числѣ 20. Тогда вы начинаете открывать карты со стороны, противоположной той, съ которой показывали карты, и первую карту считаете за семь, вторую—за восемь и т. д. Двадцатая карта и будетъ задуманная.

Если вы заявите, что откроете задуманную карту на числѣ бо̀льшемъ, чѣмъ число взятыхъ картъ, то должны соотвѣтственно увеличить число задуманной карты, а затѣмъ отсчитывать по предыдущему.

Доказательство.

Предположимъ, что задуманная карта есть 7-я, и что взято 20 картъ. Отъ задуманной карты приходимъ къ послѣдней, если будемъ считать по порядку:

7, 8, 9, 10,...., 17, 18, 19, 20.

Или, если сюда прибавить еще какое-либо число, напр. 3, то получится:

10, 11, 12,...., 20, 21, 22, 23.

Слѣдовательно, отъ послѣдней карты придемъ къ задуманной, считая точно также, но начиная съ этой послѣдней карты, которую теперь называемъ числомъ «десять».

Задача 96-я.

Карта на мѣсто!

Взята игра въ 32 карты (до семерокъ включительно). Сдѣлать такъ, чтобы замѣченная кѣмъ-либо карта находилась на опредѣленномъ, сказанномъ впередъ, мѣстѣ.

Рѣшеніе.

Предложите кому-либо замѣтить въ колодѣ какую-либо карту, а также запомнить **про себя**, на какомъ мѣстѣ, считая отъ

низа колоды, находится его карта, и объявите при этомъ, что потомъ, считая сверху, онъ найдетъ ее на такомъ-то, заданномъ напередъ, скажемъ, — **двадцатомъ** мѣстѣ.

Вслѣдъ затѣмъ возьмите карты и переложите съ низу на верхъ колоды 20 картъ (нужно сдѣлать это, держа руки за спиной, чтобы замѣтившій карту не зналъ числа переложенныхъ вами картъ). Отдайте карты обратно замѣтившему карту и спросите, на какомъ мѣстѣ замѣтилъ онъ раньше свою карту. Если онъ скажетъ число меньшее 20-ти, напр., 15, то значитъ, его карта перешла наверхъ и до нея, считая сверху, будетъ 20 — 15 картъ, а сама она будетъ на (20 — 15 + 1)-мъ мѣстѣ. Значитъ, вы скажите ему, чтобы онъ взялъ снизу колоды 15 — 1, т. е. 14 картъ, переложилъ ихъ наверхъ и считалъ затѣмъ по порядку до 20-ти. На этомъ числѣ онъ и найдетъ свою карту. Если, наоборотъ, замѣченное имъ раньше мѣсто картъ выражается числомъ, большимъ 20, напр., числомъ 25, то разсуждаете такъ. Сначала, считая сверху, замѣченная карта была на (32 — 25 + 1)-мъ мѣстѣ, а затѣмъ на мѣстѣ (20 + 33 — 25)-мъ, т. е. на 28-мъ. Поэтому скажите угадывающему, чтобы онъ съ верха положилъ на низъ колоды восемь (33 — 25 = 8) картъ и считалъ карты сверху. На 20-мъ мѣстѣ онъ и найдетъ свою карту.

Вообще пусть **a** есть число, показывающее порядокъ, считая съ низа, замѣченной карты, а **b** число, на которомъ вы желаете, чтобы выпала замѣченная кѣмъ-либо карта. Переложите съ низа на верхъ **b** картъ и спросите порядокъ замѣченной карты. Вамъ скажутъ **a**. Если **a** меньше **b**, то на верхъ нужно положить **a — 1** карту; если **a** больше **b**, то нужно положить съ верха подъ низъ **33 — a** картъ.

Считая затѣмъ карты сверху, найдемъ всегда замѣченную карту на мѣстѣ **b**.

Задача 97-я.

Кто что взялъ, — я узналъ!

Угадать, не глядя, кѣмъ изъ трехъ лицъ взята каждая изъ трехъ вещей.

Положите на столъ три различныхъ вещи, напр., ножикъ, карандашъ и перо. Положите на столъ также двадцать картъ,

или другихъ какихъ-нибудь одинаковыхъ предметовъ (напр. спичекъ, палочекъ, кубиковъ, камешковъ и т. д.). Пригласите вашихъ трехъ товарищей, напр., Петра, Павла и Ивана, сѣсть за столъ, а сами оборотитесь къ нимъ спиною, или даже уйдите въ другую комнату. Предложите этимъ товарищамъ вашимъ разобрать три вещи по одной, какъ имъ угодно. Послѣ этого вы говорите: «Петръ, возьми одну карту (или спичку и т. д.), Павелъ двѣ, Иванъ четыре». Когда это ваше желаніе исполнено, говорите далѣе: «Пусть тотъ, у кого карандашъ, возьметъ себѣ еще столько картъ (или спичекъ и т. д.), сколько имѣетъ, тотъ же, у кого ножикъ, пусть положитъ себѣ еще два раза столько картъ (или спичекъ и т. д.) сколько имѣетъ». Когда и это второе ваше желаніе исполнено, вы попросите, чтобы вамъ дали оставшіяся карты. По этому остатку вы можете узнать, у кого какая вещь. Но какъ?

Рѣшеніе.

Здѣсь вы должны разобраться въ нѣкоторыхъ числахъ и заранѣе заготовить себѣ или умѣть составить въ любой данный моментъ табличку извѣстныхъ чиселъ, основываясь на такихъ соображеніяхъ:

Предложивши тремъ лицамъ сначала взять одну, двѣ и четыре карты (или спички и т. д.), вы, въ сущности, отмѣтили каждое лицо извѣстнымъ числомъ (Петръ - одинъ, Павелъ—два, Иванъ—четыре). Затѣмъ каждое изъ этихъ трехъ лицъ по вашему указанію увеличиваетъ принадлежащее ему число. У кого карандашъ, беретъ еще столько картъ, сколько имѣетъ; у кого ножъ, еще два раза столько, сколько имѣетъ. У каждаго образуется свое число. Вся задача въ томъ, чтобы по остатку отъ двадцати картъ (или спичекъ и т. д.), которыя передаются въ ваши руки, узнать, какое у кого число. Другими словами, все основывается на томъ, что если мы числа 1, 2 и 4 будемъ всячески перемножать на числа 1, 2, 3 и затѣмъ брать всѣ полученныя суммы этихъ произведеній, то будемъ всегда получать различныя числа.

Составляя суммы произведеній изъ 1, 2, 4 на 1, 2 и 3, получимъ таблицу:

1	2	4	
3	2	1	**11**
2	3	1	**12**
3	1	2	**13**
1	3	2	**15**
2	1	3	**16**
1	2	3	**17**

Если мы числа 1, 2, 4, стоящія наверху, перемножимъ соотвѣтственно на стоящія подъ ними числа и сложимъ полученныя произведенія, то получимъ суммы, написанныя въ нашей таблицѣ за чертою справа. *Эта-то таблица и даетъ средство угадать, къмъ изъ трехъ лицъ взята каждая изъ трехъ данныхъ вещей.*

Пусть, напримѣръ, изъ двадцати оставленныхъ на столѣ картъ (или спичекъ и т. д.) вамъ возвратили только 5. Слѣдовательно, всего разобрано 15. По приведенной выше табличкѣ мы замѣтимъ, что 15 получается, когда мы 1 умножимъ на 1, 2 на 3, 4 на 2 и полученныя произведенія сложимъ. Отсюда мы заключаемъ, что тотъ, кто имѣлъ 4 карты (Иванъ), взялъ еще столько же картъ, слѣдовательно, у Ивана карандашъ. Тотъ, кто имѣлъ 2 карты (Павелъ), взялъ еще два раза столько: слѣдовательно, у Павла ножикъ.

Замѣчаніе. Эту задачу можно распространить и на большее число лицъ, напр., на четырехъ лицъ. Но для этого новаго случая нужна и новая табличка, которую надо составить на основаніи такихъ соображеній: надо отыскать такія четыре числа (скажемъ: a, b, c, d), чтобы суммы произведеній изъ этихъ чиселъ на 1, 2, 3 и 4, составленныя всевозможными способами, были различны между собой. Такія наименьшія искомыя числа суть 1, 2, 5, 13.

Составьте изъ этихъ чиселъ (помноженіемъ на 1, 2, 3, 4 и сложеніемъ) табличку, подобную предыдущей, и вы можете «угадывать», кѣмъ изъ четырехъ лицъ взята каждая изъ данныхъ четырехъ вещей.

Задача 98-я.

Нѣкто беретъ 27 картъ и раскладываетъ ихъ, послѣдовательно одна за другою, на три кучки по 9 картъ въ каждой (Карты въ рукахъ раскладывающаго повернуты крапомъ вверхъ, и раскладывающій, при распредѣленіи на 3 кучки, поворачиваетъ ихъ лицомъ вверхъ). Просятъ кого-либо мысленно замѣтить во время этой раскладки любую карту и по окончаніи раскладки сказать, въ какой изъ кучекъ находится задуманная карта. Раскладывающій сладываетъ всѣ кучки вмѣстѣ такъ, чтобы порядокъ картъ въ каждой изъ кучекъ не былъ нарушенъ, и вновь раскладываетъ ихъ на три кучки, какъ указано выше, а вслѣдъ затѣмъ вновь узнается, въ какой кучкѣ карта теперь. Вслѣдъ затѣмъ карты складываются опять-таки такъ, чтобы порядокъ картъ въ каждой кучкѣ не былъ нарушенъ. Карты раскладываются и въ третій разъ точно также на три кучки; узнается, въ какой кучкѣ находится задуманная карта, и затѣмъ складываются вновь безъ нарушенія порядка картъ въ каждой кучкѣ. Спрашивается, какъ нужно всякій разъ помѣщать кучку, содержащую задуманную карту, чтобы въ концѣ означенныхъ раскладокъ карта занимала напередъ опредѣленное мѣсто?

Рѣшеніе.

Пусть **a**, **b**, **c** означаютъ порядокъ мѣста, на которое кладется та кучка, гдѣ находится задуманная карта. Передъ этой кучкой нужно, значитъ, предварительно распредѣлить **a** **1** кучекъ изъ 9 картъ, что при нашемъ распредѣленіи дастъ по **3(a—1)** карты на каждую кучку. Затѣмъ та кучка, въ которой

находится задуманная карта, добавляетъ еще 3 карты къ каждой кучкѣ, такъ что если указать кучку, въ которой находится задуманная карта, то она будетъ тамъ въ числѣ трехъ послѣднихъ изъ $3(\mathbf{a}-1)+3$ картъ.

Вслѣдъ затѣмъ передъ кучкой, гдѣ находится задуманная карта, помѣщаемъ $\mathbf{b}-1$ остальныхъ кучекъ, такъ что придется передъ ней распредѣлять $9(\mathbf{b}-1)+3(\mathbf{a}-1)+3$ карты. Въ каждую кучку попадаетъ $3(\mathbf{b}-1)+(\mathbf{a}-1)+1$ картъ, и послѣдняя изъ картъ и есть задуманная карта. Но, раскладывая карты еще разъ, мы передъ кучкой, гдѣ находится задуманная карта, помѣщаемъ $\mathbf{c}-1$ кучку, что для мѣста (назовемъ его $\mathbf{R}$) задуманной карты даетъ:

$$9(\mathbf{c}-1)+3(\mathbf{b}-1)+(\mathbf{a}-1)+1.$$

Итакъ, для опредѣленія $\mathbf{R}$ имѣетъ формулу

$$\mathbf{R}=9(\mathbf{c}-1)+3(\mathbf{b}-1)+\mathbf{a}.$$

Отсюда, если извѣстно $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, находимъ $\mathbf{R}$. Если же $\mathbf{R}$ дано напередъ, то $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ можно опредѣлить по нижеслѣдующему правилу:

Взятое число R надо дѣлить на 3, полученное частное опять на три, но такъ, чтобы первый остатокъ не былъ нуль. Этотъ остатокъ будетъ a, и онъ указываетъ, на какомъ мѣстѣ нужно помѣстить ту кучку картъ, гдѣ находится задуманная карта. Второй остатокъ, увеличенный единицей, даетъ мѣсто, на которомъ должно указанную кучку помѣстить второй разъ, а второе частное, увеличенное единицей, дастъ мѣсто, гдѣ нужно помѣстить указанную кучку картъ въ третій разъ.

Напримѣръ: Требуется, чтобы задуманная карта была *одиннадцатой*.

11	3	
2	3	3
	0	**1**

Отсюда видно, что кучку, содержащую задуманную карту, нужно въ первый разъ помѣстить на второмъ мѣстѣ, второй — на первомъ и третій на второмъ мѣстѣ.

Пусть еще требуется задуманную карту показать на *девятомъ* мѣстѣ.

9	3	
3	2	3
	2	**0**

Значитъ, кучку, гдѣ находится задуманная карта, въ первый разъ нужно помѣстить на третьемъ мѣстѣ, во второй разъ тоже на третьемъ и въ третій — на первомъ мѣстѣ.

Замѣчаніе.

Можно, конечно, разнообразить настоящую задачу, показывая ее кому-нибудь. Такъ, напр., въ первый разъ послѣ всѣхъ раскладокъ задуманную кѣмъ-либо карту можно изъять изъ колоды, держа ее за спиной, и положить ее затѣмъ на столъ. Въ другой разъ можно впередъ, до игры, объявить, на какомъ мѣстѣ будетъ задуманная карта, или же попросить любого изъ зрителей, чтобы онъ самъ назначилъ мѣсто, на которомъ желаетъ, чтобы очутилась задуманная карта. Наконецъ, можно отдать карты любому изъ присутствующихъ съ тѣмъ, чтобы онъ раскладывалъ ихъ самъ и складывалъ кучки, какъ угодно (не мѣняя только порядка картъ въ кучкахъ). Нужно при этомъ только замѣчать, на какомъ мѣстѣ кладется кучка, содержащая задуманную карту, и примѣнять указанную выше формулу. Подобные пріемы оживляютъ задачу.

Задача 99-я.

Сдѣлать то же, что и въ предыдущей задачѣ, но съ 48-ю картами, которыя раскладываются три раза на четыре кучки.

Рѣшеніе.

Пусть a будетъ порядокъ кучки съ задуманной картой послѣ первой раскладки, b -порядокъ, въ которомъ она будетъ послѣ второй раскладки, и c —порядокъ, въ которомъ она будетъ послѣ третьей раскладки.

Если кучку, содержащую задуманную карту, положить на мѣстѣ b, то до этой кучки, значитъ, находится $12(b-1)$ картъ, и, раскладывая ихъ опять на 4 кучки, мы найдемъ, что на каждую кучку изъ этихъ картъ придется по $3(b-1)$. Значитъ. задуманная карта находится въ своей кучкѣ послѣ этого количества $3(b-1)$ картъ; и если мы обозначимъ черезъ r мѣсто, которое она занимаетъ послѣ этихъ картъ, то ея мѣсто во всей кучкѣ опредѣлится числомъ $3(b-1)+r$. Складываемъ опять кучки и передъ кучкой, гдѣ помѣщается задуманная карта, кладемъ теперь $12(c-1)$ картъ. Означая, затѣмъ. черезъ R мѣсто, которое занимаетъ карта во всей взятой игрѣ, найдемъ, что

$$R=12(c-1)+3(b-1)+r.$$

Остается, теперь, опредѣлить количество r.

Когда складывали кучки въ первый разъ, то передъ кучкой, гдѣ находилась задуманная карта, было $12(a-1)$ картъ. Разложивъ затѣмъ карты, мы положили сначала въ каждую кучку по $3(a-1)$ карты и еще 3 карты изъ кучки, содержащей задуманную карту. При слѣдующей же раскладкѣ эти $6(a-1)+3$ карты распредѣлились въ четырехъ кучкахъ послѣ $3(b-1)$ картъ, какъ указано выше. Это и есть то распредѣленіе, которое даетъ мѣсто r. Но если $a=1$, то нужно распредѣлить только 3 карты, гдѣ находится задуманная карта. Она, слѣдовательно. будетъ на первомъ мѣстѣ послѣ $3(b-1)$ картъ и, значитъ,

$$R=12(c-1)+3(b-1)+1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Если $a=4$, то количество $3(a-1)+3$ равно 12. Эти двѣнадцать картъ, будучи распредѣлены, разложатся по 3 карты на каждую кучку, и такъ какъ задуманная карта находится между тремя послѣдними, то она будетъ третьей гдѣ-то послѣ $3(b-1)$ картъ, какъ это видно изъ слѣдующей разстановки, гдѣ x означаетъ въ кучкѣ задуманную карту:

1-я кучка.	2-я кучка.	3-я кучка.	4-я кучка.
c	c	c	c
c	c	c	c
c	x	x	x

Въ этомъ случаѣ:

$$R = 12(c-1) + 3(b-1) + 3. \;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

Если $a = 3$, количество $3(a-1)+3$ равно 9, и распредѣленіе этихъ 9 картъ послѣ $3(b-1)$ картъ, положенныхъ до нихъ, будетъ таково:

1-я кучка.	2-я кучка.	3-я кучка.	4-я кучка.
c	c	c	c
c	c	x	x
x			

Итакъ, если задуманная карта не въ первой кучкѣ, то она будетъ во второй кучкѣ послѣ $3(b-1)$ первыхъ картъ, и получается

$$R = 12(c-1) + 3(b-1) + 2. \;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

Но если задуманная карта находится въ первой кучкѣ, то

$$R = 12(c=1) + 3(b-1) + 3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (4)$$

Если случится это послѣднее, то достаточно, сложивъ кучки, взять одну карту съ верха игры и положить ее подъ низъ, чтобы равенство (4) замѣнилось равенствомъ (3).

Итакъ, задача рѣшается равенствами (1), (2) и (3). Отсюда вытекаетъ такое правило:

Число R, означающее мѣсто, на которомъ должна находиться задуманная карта, дѣлится на 3, а полученное частное на 4, и притомъ такъ, чтобы первое дѣленіе не давало въ остаткѣ нуля. Если первый остатокъ равенъ 1, то, складывая кучки въ первый разъ, нужно кучку, содержащую задуманную карту, положить наверхъ. Если остатокъ равенъ 3, то ее нужно положить снизу, а если остатокъ равенъ 2, то нужно указанную кучку положить на третьемъ мѣстѣ. Второй остатокъ, увеличенный единицей, покажетъ мѣсто, гдѣ нужно положить указанную кучку послѣ второй раскладки, а второе частное, увеличенное единицей, укажетъ, на какомъ мѣстѣ нужно положить кучку съ задуманной картой послѣ третьей раскладки. Но если послѣ первой раскладки приходилось кучку съ задуманной картой класть на третьемъ мѣстѣ и затѣмъ, если послѣ третьей

раскладки задуманная карта окажется въ первой изъ четырехъ кучекъ, верхнюю карту надо переложить внизъ.

Примѣръ I. Требуется, чтобы задуманная карта была 37-ой.

37	3	
1	12	4
	0	3

Значитъ, въ первый разъ кучка съ задуманной картой кладется первой, во второй разъ—тоже первой, а въ третій разъ—четвертой.

Примѣръ II. Требуется, чтобы задуманная карта была 20-й.

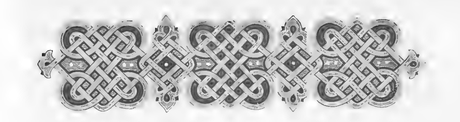
20	3	
2	6	4
	2	1

Значитъ, кучку съ задуманной картой надо положить на третье мѣсто, во второй разъ тоже на третье и въ третій—на второе.

Примѣръ III. Требуется, чтобы задуманная карта была 24-ой.

24	3	
3	7	4
	3	1

Въ первый разъ кучка съ задуманной картой кладется на четвертомъ мѣстѣ, во второй разъ тоже на четвертомъ и въ третій—на второмъ.



Мосты и острова.

Не приходилось ли вамъ жить, а можетъ быть вы и сейчасъ живете въ городѣ, или мѣстности, гдѣ течетъ рѣка, которая дѣлится на протоки и рукава, образующіе острова. Черезъ рѣку и ея протоки переброшены, быть можетъ, мосты, соединяющіе различныя части города. Въ Петербургѣ, напримѣръ, очень много подобныхъ протоковъ, развѣтвленій Невы и разныхъ каналовъ, черезъ которые переброшено весьма большое количество мостовъ и переходовъ. Не приходила ли вамъ когда-либо въ голову мысль (если, конечно, вы живете въ мѣстности, гдѣ есть рѣка, острова и мосты) совершить такую прогулку, чтобы во время ея перейти *всѣ* эти мосты, но перейти ихъ такъ, чтобы на каждомъ побывать *только по одному разу?* Врядъ ли вы думали объ этомъ, а между тѣмъ мы стоимъ здѣсь передъ весьма интересной и важной задачей, поднятой впервые знаменитымъ математикомъ Эйлеромъ.

Совѣтуемъ въ свободное время заняться изученіемъ этой задачи въ особенности. Она служитъ отличнымъ введеніемъ въ совсѣмъ особую область геометріи, которую можно было бы назвать *геометріей расположеній* (Geometria situs, Géometrie de situations).

Геометрія расположеній занимается только вопросами *порядка* и *расположенія*, оставляя въ сторонѣ все относящееся къ измѣренію и отношенію величинъ геометрическихъ фигуръ

и тѣлъ. Всѣ почти вопросы, связанные съ такими играми, какъ шахматы, шашки, домино, солитеръ, лото, многія карточныя задачи и т. д., наконецъ, такая практическая задача, какъ подборъ разноцвѣтныхъ нитей для составленія извѣстнаго узора ткани,—все это относится къ геометріи расположеній. Значитъ, практически геометрія эта извѣстна людямъ съ глубокой древности. А на желательность ея научнаго развитія указывалъ еще Лейбницъ въ 1710 году. Эйлеръ, какъ упомянуто, тоже занимался вопросами этого порядка и, между прочимъ, задачей о кенигсбергскихъ мостахъ, которую мы здѣсь и излагаемъ въ сколь возможно упрощенномъ видѣ.

Число научныхъ трудовъ и изслѣдованій въ области геометріи расположеній довольно значительно. Но, несмотря на блестящую разработку нѣкоторыхъ отдѣльныхъ вопросовъ, нужно сказать, что для общихъ основаній этой отрасли науки сдѣлано сравнительно мало. Для желающихъ посвятить себя этому предмету представляется обширное необработанное поле, на которомъ можно сдѣлать многое.

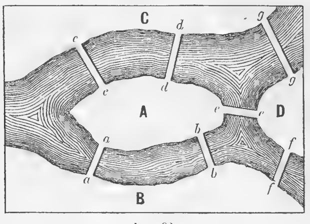
Вторая поучительная сторона предлагаемыхъ задачъ состоитъ въ изслѣдованіи, возможна или нѣтъ данная задача, прежде чѣмъ приниматься за рѣшеніе ея. Эйлеръ, въ частности, подробно изслѣдовалъ случай невозможности.

Задача 101-я.

Кенигсбергскіе мосты въ 1759 году.

Задача, предложенная Эйлеромъ въ 1759 году, заключается въ слѣдующемъ:

Въ городѣ Кенигсбергѣ, въ Помераніи, есть островъ по имени Кнейпгофъ. Рѣка, огибающая островъ, дѣлится на два рукава, черезъ которые переброшено семь мостовъ: a, b, c, d, e, f, g (см. фиг. 92). Спрашивается, можно ли сдѣлать такую прогулку, чтобы за одинъ разъ перейти черезъ всѣ эти мосты, не переходя ни черезъ одинъ мостъ два или болѣе разъ?



Фиг. 92.

«Это вполнѣ возможно!»—скажетъ кто-либо. —«Нѣтъ, это невозможно!»—скажетъ иной. Но кто правъ и кто нѣтъ, и какъ это доказать?

Самый простой путь рѣшенія задачи, казалось бы, такой: сдѣлать *всѣ возможныя пробы* такихъ переходовъ, т. е. перечислить всѣ возможные пути, и затѣмъ разсмотрѣть, какой или какіе изъ нихъ удовлетворяютъ условіямъ вопроса. Но очевидно, что даже въ случаѣ только семи мостовъ приходится дѣлать слишкомъ много такихъ пробъ. А при увеличеніи числа мостовъ такой способъ рѣшенія практически совершенно немыслимъ. Да, кромѣ того, при одномъ и томъ же числѣ мостовъ задача измѣняется въ зависимости еще отъ *расположенія* этихъ мостовъ. Поэтому изберемъ иной, болѣе надежный путь рѣшенія задачи.

Рѣшеніе.

Прежде всего изслѣдуемъ, *возможенъ или нѣтъ* искомый нами путь для даннаго расположенія семи мостовъ. Для облегченія разсужденій введемъ такія условныя обозначенія:

Пусть A, B, C и D будутъ разныя части суши, раздѣленной рукавами рѣки (см. фиг. 92).

Затѣмъ: переходъ изъ мѣста A въ мѣсто B мы будемъ обозначать черезъ AB,—все равно, по какому бы мосту мы ни шли,—по a или по b. Если, затѣмъ, изъ B мы перейдемъ въ D,

то этотъ путь обозначимъ черезъ BD, а весь переходъ или путь изъ A въ D обозначимъ черезъ ABD, такъ что здѣсь B одновременно обозначаетъ и мѣсто прибытія и мѣсто отправленія.

Если, теперь, изъ D перейдемъ въ C, то весь пройденный путь обозначимъ черезъ ABDC. Итакъ, это *обозначеніе* изъ *четырехъ* буквъ показываетъ, что изъ мѣста A мы, пройдя мѣста B и D, пришли въ C, при чемъ перешли *три* моста.

Если, значитъ, мы перейдемъ *четвертый* мостъ, то для обозначенія пути намъ понадобится *пять* буквъ. Послѣ перехода слѣдующаго *пятаго* моста понадобится обозначить пройденный путь *шестью* буквами и т. д.

Словомъ, — если бы мы обошли по *одному разу* всѣ семь данныхъ мостовъ, то нашъ *путь долженъ былъ бы обозначиться восемью буквами* (Вообще, если есть n мостовъ, то для обозначенія искомаго нами пути черезъ эти мосты понадобится $n+1$ буква).

Но какъ и въ какомъ порядкѣ должны итти буквы въ этомъ обозначеніи?

Между берегами A и B есть два моста. Значитъ, послѣдовательность буквъ AB или BA должна быть два раза. Точно также два раза должно повторяться сосѣдство буквъ A и C (Между этими мѣстами тоже два моста). Затѣмъ, по одному разу должно быть сосѣдство буквъ A и D, B и D, D и C.

Слѣдовательно, если предложенная задача возможна, т. е. возможно кенигсбергскіе мосты перейти такъ, какъ требуется задачей, то *необходимо*:

1) Чтобы весь путь обозначился только восемью буквами,— не болѣе; 2) чтобы въ расположеніи этихъ буквъ соблюдались указанныя условія относительно сосѣдства и повторяемости буквъ.

Разберемся, теперь, въ слѣдующемъ весьма важномъ обстоятельствѣ:

Возьмемъ, наприм., мѣстность A, соединенную съ другими мѣстностями нѣсколькими мостами: a, b, c,.... (въ данномъ случаѣ *пятью* мостами). Если мы перейдемъ мостъ a (все равно откуда, изъ A или другого мѣста), то въ обозначеніи пути

буква А появится одинъ разъ. Пусть пѣшеходъ прошелъ 3 моста *a*, *b* и *c*, ведущіе въ А. Тогда въ обозначеніи пройденнаго пути буква А появится 2 раза, въ чемъ нетрудно убѣдиться. Если же на А ведутъ 5 мостовъ, то въ обозначеніи пути черезъ всѣ эти мосты буква А повторится 3 раза. Вообще легко вывести, что если число мостовъ, ведущихъ въ А, есть *нечетное*, то чтобы узнать, сколько разъ въ обозначеніи требуемаго пути повторится буква А, надо къ этому нечетному числу мостовъ прибавить единицу и полученное число раздѣлить пополамъ. То же, конечно, относится и ко всякой иной мѣстности съ нечетнымъ числомъ мостовъ, которую для краткости будемъ называть *нечетной мѣстностью.*

Усвоивъ все предыдущее, приступимъ къ окончательному изслѣдованію задачи о 7-ми кенигсбергскихъ мостахъ:

Въ мѣстность А ведетъ 5 мостовъ. Въ каждую изъ мѣстностей B, C и D ведетъ по три моста. Значитъ всѣ эти мѣстности *нечетныя*, и на основаніи только что сказаннаго—въ обозначеніе полнаго пути черезъ всѣ семь мостовъ необходимо чтобы

буква	А	вошла	$\frac{5+1}{2}$	, т. е.	3 раза
»	B	»	$\frac{3+1}{2}$	»	2 »
»	C	»	$\frac{3+1}{2}$	»	2 »
»	D	»	$\frac{3+1}{2}$	»	2 »
				Всего	9 буквъ.

Получается, такимъ образомъ, что въ обозначеніи искомаго пути необходимо должно войти 9 буквъ. Но мы уже доказали выше, что въ случаѣ возможности задачи весь путь долженъ необходимо обозначиться *только восемью* буквами. *Итакъ, задача для даннаго расположенія семи мостовъ невозможна.*

Значитъ ли это, что задача о переходѣ по одному разу черезъ мосты невозможна всегда, когда имѣется одинъ островъ,

два рукава рѣки и семь мостовъ? Конечно, нѣтъ. Доказано только, что задача невозможна для *даннаго расположенія* мостовъ. При иномъ расположеніи этихъ мостовъ и рѣшеніе могло бы быть иное.

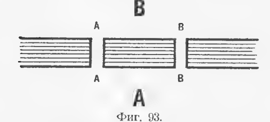
Теперь же замѣтимъ, что во всѣхъ тѣхъ случахъ, когда число мостовъ, ведущихъ въ различныя мѣста, есть нечетное, можно примѣнять разсужденія совершенно подобныя предыдущимъ и такимъ образомъ убѣдиться въ возможности или невозможности задачи. И не трудно вывести для даннаго случая такое общее правило:

Если число буквъ, которыя должны входить въ обозначеніе полнаго пути перехода черезъ всѣ мосты по одному разу, не равно числу мостовъ, увеличенному единицей, то задача невозможна.

Для этого же случая нечетныхъ мѣстностей замѣтимъ и то, что правила для нахожденія числа повтореній какой-либо буквы,— наприм. А,—въ обозначеніи полнаго пути всегда одинаково приложимо, будутъ ли идущіе изъ А мосты вести въ одно какое-либо мѣсто В, или же въ различныя мѣста.

Чтобы перейти къ болѣе общему рѣшенію задачи, необходимо разсмотрѣть случаи, когда имѣемъ четное число мостовъ, ведущихъ откуда либо въ другія мѣста.

Пусть, напримѣръ, изъ мѣста А въ другія мѣста переброшено черезъ рѣку четное число мостовъ. Тогда при обозначеніи пути перехода черезъ всѣ мосты по одному разу надо различать два случая: 1) начинается ли путь изъ А, или 2) изъ другого мѣста.



Фиг. 93.

Въ самомъ дѣлѣ, если изъ А въ В, напр., ведутъ два моста, то путникъ, отправившійся изъ А и прошедшій по одному

разу оба моста, долженъ свой путь обозначать такъ: ABA, т. е. буква A повторяется два раза. Если же путникъ пройдетъ черезъ тѣ же два моста, но изъ мѣста B, то буква A появится всего одинъ разъ, ибо этотъ путь обозначится черезъ BAB.

Предположимъ теперь, что въ A ведутъ 4 моста,—изъ одной ли какой мѣстности или изъ разныхъ, это все равно. И пусть путникъ отправляется въ обходъ по одному разу всѣхъ мостовъ изъ мѣста A. Опять-таки легко видѣть, что въ такомъ случаѣ при обозначенiи пройденнаго пути буква A повторится 3 раза; но если начать обходъ изъ другой мѣстности, то буква A повторится только два раза. Точно также въ случаѣ шести мостовъ буква A въ обозначенiи всего пути повторится четыре раза, или три, смотря по тому, начался ли переходъ изъ A, или изъ другой мѣстности. Словомъ, можно вывести такое правило:

Если число мостовъ извѣстной мѣстности есть четное (четная мѣстность), то въ соотвѣтствующемъ обозначенiи пути буква, обозначающая мѣстность, появляется число разъ, равное половинѣ числа мостовъ, если переходъ начался изъ другой мѣстности. Если же переходъ начался изъ самой четной мѣстности, то число появленiй этой буквы равно половинѣ числа мостовъ да еще единица.

Очевидно, однако, что при полномъ пути переходъ начинается изъ одной только какой-либо опредѣленной мѣстности. Поэтому *условимся разъ навсегда* для *четной мѣстности* число повторенiй ея буквы въ обозначенiи пути считать равнымъ *половинѣ* числа мостовъ, ведущихъ въ эту мѣстность; а для *нечетной* мѣстности число повторенiй ея буквы получимъ, если къ числу мостовъ этой мѣстности придадимъ единицу и полученное число раздѣлимъ пополамъ.

Итакъ, при рѣшенiи задачи о мостахъ необходимо различать два случая:

1) *Идущiй отправляется изъ нечетной мѣстности*; 2) *онъ идетъ изъ четной мѣстности.*

Въ первомъ случаѣ число повторенiй буквъ, обозначающихъ

полный путь, должно быть равнымъ числу мостовъ, увеличенному единицей. Въ противномъ случаѣ *задача невозможна.*

Во второмъ случаѣ полное число повтореній буквъ должно равняться числу мостовъ, такъ какъ, начиная путь съ четной мѣстности, нужно число повтореній соотвѣтствующей буквы увеличить единицей только для одной мѣстности.

Общее рѣшеніе.

Разсмотримъ теперь задачу о мостахъ съ болѣе общей точки зрѣнія. Изъ предыдущихъ разсужденій мы уже можемъ вывести общій пріемъ рѣшенія каждой подобной задачи о мостахъ. Во всякомъ случаѣ мы можетъ тотчасъ же убѣдиться въ невозможности подобнаго рѣшенія. Для этого расположимъ лишь рѣшеніе такъ:

1) Отмѣчаемъ общее количество мостовъ и ставимъ его въ заголовкѣ рѣшенія;

2) Обозначаемъ различныя мѣстности, раздѣленныя рѣкой, буквами A, B, C, D... и пишемъ ихъ въ столбецъ одна подъ другой;

3) Противъ каждой изъ мѣстностей пишемъ во второмъ столбцѣ число всѣхъ ведущихъ на нее мостовъ;

4) *Четныя мѣстности* отмѣчаемъ звѣздочкой при соотвѣтствующихъ буквахъ 1-го столбца;

5) Въ третьемъ столбцѣ соотвѣтственно пишемъ половины четныхъ чиселъ 2-го столбца; а если во второмъ столбцѣ есть числа нечетныя, то прибавляемъ къ нимъ единицу и пишемъ въ 3-мъ столбцѣ половину полученнаго числа (Каждое число 3-го столбца показываетъ число повтореній соотвѣтствующей буквы).

6) Находимъ сумму 3-го столбца.

Если эта послѣдняя сумма: 1) равна числу мостовъ, или 2) больше его всего на одну единицу, то вопросъ о полномъ обходѣ всѣхъ мостовъ по одному разу *можетъ* быть рѣшенъ, если только задача возможна вообще. Но при этомъ надо имѣть въ виду, что въ первомъ случаѣ обходъ надо начинать съ четной мѣстности, а во второмъ—съ нечетной. Для случая раз-

смотрѣнной нами задачи о 7-ми кенигсбергскихъ мостахъ будемъ имѣть, значитъ, такую схему рѣшенія:

Число мостовъ 7.

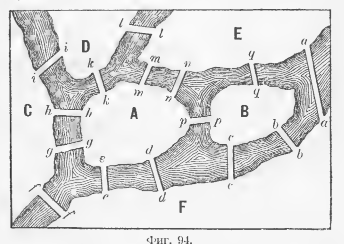
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
	Всего	9

Такъ какъ 9 больше, чѣмъ 7 + 1, или 8, то, слѣдовательно, задача невозможна.

Задача 102-я.

Переходъ черезъ 15 мостовъ.

Попробуемъ теперь рѣшить другую задачу, въ которой имѣемъ два острова, соединенныхъ между собой и съ берегами рѣки 15-ю мостами, какъ это указано на прилагаемомъ рисункѣ (фиг. 94).



Фиг. 94.

Спрашивается: можно ли за одинъ разъ обойти всѣ эти мосты, не проходя ни черезъ одинъ болѣе одного раза?

Согласно выведеннымъ нами уже раньше пріемамъ рѣшенія, обозначаемъ разными буквами всѣ мѣстности, раздѣленныя раз-

личными рукавами рѣки и соединенныя мостами. Послѣ этого составляемъ слѣдующую таблицу:

Число мостовъ 15.

A*	 8	4
B*	 4	2
C*	 4	2
D	 3	2
E	 5	3
F*	 6	3
	Всего	**16**

Отсюда выводимъ, что задача возможна, ибо число повтореній буквъ на единицу больше числа мостовъ. Кромѣ того, по предыдущему знаемъ, что обходъ долженъ начаться изъ нечетной мѣстности D или E.

Искомый обходъ мостовъ можетъ быть сдѣланъ такъ:

EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBqFlD

или въ обратномъ порядкѣ. Маленькія буквы среди большихъ показываютъ, какіе именно переходятся мосты.

Изложенные выше пріемы рѣшенія задачи прежде всего позволяютъ судить объ ея возможности, или невозможности. Сдѣлаемъ теперь еще нѣсколько выводовъ, ведущихъ къ болѣе опредѣленному уясненію подобныхъ задачъ.

Замѣтимъ прежде всего, что сумма чиселъ второй колонны точно равна двойному количеству мостовъ. Это зависитъ отъ того, что въ каждомъ мосту мы считаемъ обѣ его оконечности, упирающіяся въ различные берега. Отсюда нетрудно вывести слѣдующее:

1) Сумма чиселъ второго столбца всегда должна быть четной, ибо половина ея должна дать число мостовъ.

2) Значитъ, если задача возможна, то въ ней или нѣтъ совсѣмъ *нечетныхъ мѣстностей,* или же они есть въ *четномъ* количествѣ (однако не болѣе двухъ, какъ увидимъ сейчасъ ниже). Иначе второй столбецъ при сложеніи не давалъ бы четнаго числа.

3) Если въ задачѣ всѣ мѣстности четныя, то задача всегда возможна, изъ какой бы мѣстности мы ни отправлялись.

Такъ, напримѣръ, въ случаѣ кенигсбергскихъ мостовъ задачу можно было бы рѣшить, если бы задано было обойти всѣ мосты по 2 раза каждый, что сводится, въ сущности, къ удвоенію числа мостовъ, т. е. къ обращенію всѣхъ данныхъ мѣстностей въ четныя.

4) Если въ задачѣ есть только двѣ нечетныя мѣстности, а остальныя всѣ четныя, то сумма цифръ третьяго столбца на единицу больше числа мостовъ, и задача возможна, если начать обходъ мостовъ съ одной изъ двухъ нечетныхъ мѣстностей. Но если число нечетныхъ мѣстностей будетъ болѣе 2-хъ, т. е. 4, 6, 8 и т. д., то задача оказывается невозможной, такъ какъ сумма чиселъ третьяго столбца будетъ болѣе числа мостовъ на 2, на 3, на 4 и т. д. единицы.

Вообще: При всякомъ данномъ расположеніи мостовъ тотчасъ же не трудно опредѣлить случай возможности или невозможности задачи. Задача невозможна, если число нечетныхъ мѣстностей болѣе двухъ. Задача возможна, если 1) всѣ мѣстности четныя и 2) если нечетныхъ мѣстностей только 2. Въ послѣднемъ случаѣ обходъ мостовъ надо начинать съ одной изъ этихъ нечетныхъ мѣстностей.

Изслѣдовавъ задачу и заключивъ о ея возможности, остается только совершить самый обходъ мостовъ. Но это уже сравнительно легкая часть задачи, при выполненіи которой лучше всего придерживаться такого правила:

Отбрасываемъ мысленно столько группъ мостовъ, ведущихъ изъ одной мѣстности въ другую, сколько возможно. Уменьшивъ такимъ образомъ число мостовъ, опредѣляемъ чрезъ нихъ путь. Затѣмъ принимаемъ во вниманіе отброшенные раньше мосты и заканчиваемъ обходъ.

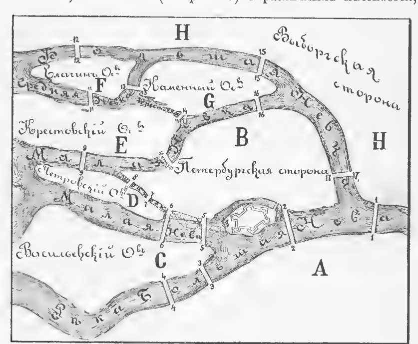
Задача 103-я.

Петербургскіе мосты.

Разсмотримъ теперь Петербургскіе мосты въ 1910 году, расположенные по Невѣ и ея рукавамъ.

Мы возьмемъ, впрочемъ, только всѣ мосты, ведущіе черезъ Большую Неву, и затѣмъ мосты, переброшенные на большіе острова черезъ Малую Неву, Большую, Малую и Среднюю Невки, черезъ р. Крестовку и Ждановку. Кронверкскій проливъ съ Петропавловской крѣпостью оставимъ въ сторонѣ. Точно также не беремъ Фонтанки, Мойки и многочисленныхъ каналовъ съ ихъ мостами, предоставляя читателю потомъ самому включить ихъ въ задачу и разобраться въ возможности ея рѣшенія, что очень легко.

Итакъ, мы имѣемъ (см. фиг. 95) 8 различныхъ мѣстностей,



Фиг. 95.

соединенныхъ 17-ю мостами. Приступимъ къ изслѣдованію задачи по выведенной уже выше схемѣ.

Всѣхъ мостовъ 17.

Городъ по лѣвую сторону Больш. Невы	A*	4	2
Петербургская сторона	B*	8	4
Васильевскій островъ	C*	4	2
Петровскій островъ	D	3	2
Крестовскій островъ	E*	4	2
Елагинъ островъ	F	3	2
Каменный островъ	G*	4	2
Выборгская сторона	H*	4	2
		Всего	18

Мы видимъ, что число нечетныхъ мѣстностей въ данномъ случаѣ равно двумъ, а сумма чиселъ третьяго столбца на единицу больше числа мостовъ.

Итакъ, задача возможна, при чемъ обходъ надо начинать изъ одной изъ нечетныхъ мѣстностей D или F, т. е. начать съ Елагина острова и придти на Петровскій, или наоборотъ. Если начать съ Елагина острова, то обойти всѣ мосты можно, напримѣръ, такъ:

$$F_{12}H_{15}G_{16}B_{17}H_1A_2B_5C_3A_4C_6B_7D_8B_{10}E_{14}G_{13}F_{11}E_9D.$$

Цифры, поставленныя между буквами, указываютъ, какіе переходятся мосты.

Задача 104-я.

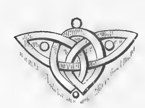
Путешествіе контрабандиста.

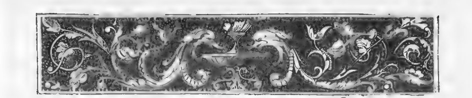
Задачу о переходѣ черезъ мосты можно предлагать въ различныхъ видоизмѣненіяхъ. Можно свести ее, напримѣръ, на путешествіе контрабандиста, который рѣшилъ побывать во всѣхъ странахъ Европы, но такъ, чтобы черезъ границу каждаго государства ему пришлось переходить только одинъ разъ.

Въ данномъ случаѣ очевидно, что различныя страны и ихъ границы будутъ соотвѣтствовать разнымъ мѣстностямъ и рука-

вамъ рѣки, черезъ которыя переброшено по одному мосту (для каждой границы, общей двумъ странамъ).

Изслѣдуя возможность задачи, тотчасъ видимъ, что Швеція, Испанія и Данія имѣютъ нечетное число границъ съ сосѣдними государствами, т. е. число нечетныхъ мѣстностей болѣе двухъ. А слѣдовательно, путешествіе, которое предполагаетъ совершить контрабандистъ, невозможно.

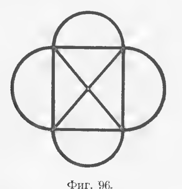




О фигурахъ, вычерчиваемыхъ однимъ почеркомъ.

Задача 105-я.

Помню, что въ дѣтствѣ меня соблазняла одно время надежда получить сразу цѣлый милліонъ рублей!... Милліонъ!... Подумаешь, чего только нельзя сдѣлать за эти деньги! И чтобы получить этотъ милліонъ, требовалось начертить только такую простую фигурку (фиг. 96):

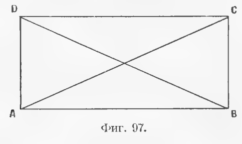


Фиг. 96.

Шутники увѣряли меня, что англичане (почему именно они, а не кто иной,—не знаю) тотчасъ дадутъ милліонъ рублей каждому, кто придетъ къ нимъ и начертитъ эту фигуру. Но при вычерчиваніи ставилось одно условіе. Требовалось, чтобы фигура эта была вычерчена *однимъ непрерывнымъ почеркомъ*, т. е. не отнимая пера или карандаша отъ бумаги и *не удваивая*

ни одной линіи, другими словами,—по разъ проведенной линіи нельзя уже было пройти второй разъ.

Надежда стать «милліонеромъ», рѣшивъ такую легкую задачу, заставила меня испортить много бумаги и потратить много времени на попытки вычертить эту фигуру, какъ требовалось, однимъ почеркомъ. Задача, однако, не рѣшалась, и это было тѣмъ досаднѣе, что она не рѣшалась только «чуть-чуть»... Никакъ не удавалось провести *только одной* «послѣдней» какой-либо линіи. Удалось даже открыть такой секретъ, что вся трудность въ томъ, чтобы вычертить сначала однимъ почеркомъ, не повторяя линіи, еще болѣе простую фигуру: четыреугольникъ съ двумя діагоналями (см. фиг. 97). Это, казалось бы, уже совсѣмъ просто, и все-таки... не удавалось!..



Фиг. 97.

— Этого нельзя сдѣлать!—восклицалъ я, наконецъ, съ неподдѣльнымъ отчаяніемъ.

— Почему же нельзя?—отвѣчали мнѣ.—А вотъ найдется такой «умный» человѣкъ, что возьметъ да начертитъ и получитъ милліонъ.

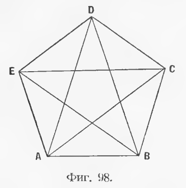
Но позволить кому-либо выхватить, такъ сказать, у себя изъ-подъ носа милліонъ я никакъ не хотѣлъ и снова принимался за безконечныя попытки нарисовать эту фигурку однимъ почеркомъ.

— Этого нельзя сдѣлать!—сказали мнѣ, наконецъ, старшіе, знаніямъ и словамъ которыхъ я безусловно вѣрилъ. Но тогда и я, въ свою очередь, спросилъ:

— Почему?

И нужно сознаться, что *никто* изъ нихъ не могъ мнѣ этого объяснить, и сомнѣніе въ возможности этой задачи у меня такъ-таки и осталось, тѣмъ болѣе, что фигуры гораздо болѣе слож-

ныя и трудныя съ виду легко вычерчивались однимъ почеркомъ. Такъ, напримѣръ, выпуклый пятиугольникъ со всѣми его діагоналями легко вычерчивался однимъ непрерывнымъ движеніемъ безъ повторенія линій, при чемъ получалась такая фигура (см. фиг. 98).



Фиг. 98.

То же самое легко удавалось со всякимъ многоугольникомъ съ нечетнымъ числомъ сторонъ и никакъ не удавалось съ квадратомъ, шестиугольникомъ и т. д., словомъ—съ многоугольникомъ съ четнымъ числомъ сторонъ.

Теперь намъ не трудно будетъ разобраться и доказать, какую изъ любыхъ данныхъ фигуръ можно вычертить однимъ почеркомъ, безъ повторенія линій, а какую нѣтъ. Каждую изъ задачъ подобнаго рода можно тотчасъ свести къ разобраной уже нами *Эйлеровой задачѣ о мостахъ*.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ, наприм., четыреугольникъ ABCD съ двумя его діагоналями, пересѣкающимися въ E (фиг. 97). Можно ли его вычертить однимъ непрерывнымъ почеркомъ, безъ повторенія линій?

Точки A, B, C, D и E (эта послѣдняя буква обозначаетъ пересѣченіе діагоналей и на чертежѣ не показана) мы представимъ себѣ, какъ центры нѣкоторыхъ мѣстностей, раздѣленныхъ рѣкой, а линіи, соединяющія эти точки, какъ мосты, ведущіе въ эти мѣстности. Что же мы въ данномъ случаѣ получаемъ? Пять мѣстностей, изъ которыхъ **4 нечетныхъ** и одна четная. Мы знаемъ уже, что въ такомъ случаѣ нельзя за одинъ разъ обойти всѣ мосты, не переходя ни черезъ одинъ два раза,

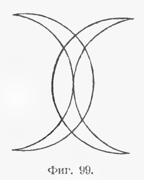
или, другими словами,—нельзя обойти всѣ данныя точки одной непрерывной линіей безъ повторенія прежняго пути.

Случаи возможности и невозможности вычерчиванія однимъ почеркомъ фигуръ совершенно тѣ же, что и въ задачѣ о мостахъ. Одна задача, въ сущности, сводится на другую.

Всякій нечетный многоугольникъ со всѣми его діагоналями можно вычертить однимъ почеркомъ безъ повторенія линій потому, что этотъ случай соотвѣтствуетъ тому, когда данныя въ задачѣ о мостахъ мѣстности всѣ четныя.

Соображенія, изложенныя здѣсь, одинаково прилагаются ко всякой фигурѣ, образована ли она прямыми или кривыми линіями, на плоскости ли или въ пространствѣ. Такъ, нетрудно видѣть, что возможно описать однимъ непрерывнымъ движеніемъ всѣ ребра правильнаго октаедра, и нельзя этого сдѣлать для четырехъ остальныхъ правильныхъ выпуклыхъ тѣлъ.

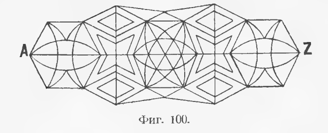
Говорятъ, что Магометъ концомъ своей палки вмѣсто подписи (онъ былъ неграмотенъ) описывалъ однимъ почеркомъ такой состоящій изъ двухъ роговъ луны знакъ (фиг. 99).



Фиг. 99.

И это вполнѣ понятно, потому что въ данномъ случаѣ мы имѣемъ дѣло только съ точками четнаго порядка, а слѣдовательно вычертить такую фигуру однимъ почеркомъ безъ повторенія тѣхъ же линій всегда возможно. Всегда возможно также вычертить однимъ почеркомъ и такую фигуру, гдѣ помимо точекъ четнаго порядка есть и двѣ точки (но не болѣе) нечетнаго порядка. Вотъ весьма красивый и замысловатый образчикъ

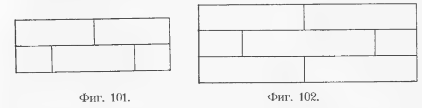
такой фигуры, заключающей въ себѣ 2 нечетныя точки A и Z (Фиг. 100):



Фиг. 100.

Съ какой-либо изъ этихъ точекъ и надо начинать непрерывное вычерчиваніе фигуры, какъ мы уже знаемъ изъ задачи о мостахъ.

Также нельзя вычертить однимъ почеркомъ нижеслѣдующія фигуры (101 и 102).



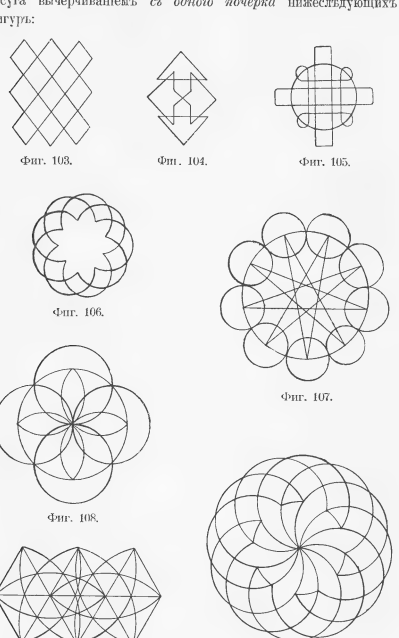
Фиг. 101. Фиг. 102.

при всей ихъ видимой простотѣ, такъ какъ въ первой 8, а во второй двѣнадцать точекъ нечетнаго порядка. Первая можетъ быть вычерчена не менѣе какъ **четырехкратной**, а вторая не менѣе, какъ **шестикратной** непрерывной линіей.

Если взять шахматную доску съ 64-мя клѣтками, то въ ней 28 точекъ нечетнаго порядка, и, чтобы вычертить ее, надо чертить 14-ти-кратную линію.

Съ другой стороны, если взять треугольникъ, подѣлить каждую изъ его сторонъ на 12 (или сколько угодно) равныхъ частей и провести изъ этихъ точекъ линіи, параллельныя другимъ сторонамъ, то полученная сѣтчатая фигура можетъ быть вычерчена однимъ непрерывнымъ движеніемъ безъ повтореній. Такихъ примѣровъ можно подобрать сколько угодно.

Для упражненія предлагаемъ читателю заняться во время досуга вычерчиваніемъ *съ одного почерка* нижеслѣдующихъ фигуръ:



Фиг. 103.

Фиг. 104.

Фиг. 105.

Фиг. 106.

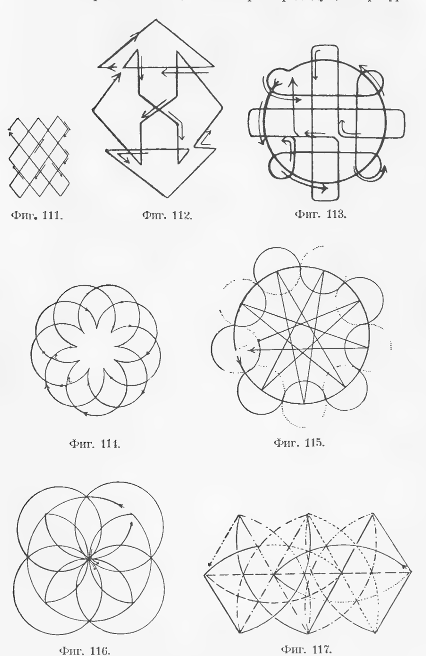
Фиг. 107.

Фиг. 108.

Фиг. 109.

Фиг. 110.

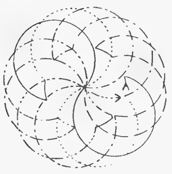
Нижеслѣдующія фигуры показываютъ, какъ наиболѣе просто дѣлается вычерчиваніе съ одного почерка предыдущихъ фигуръ.



Фиг. 111. Фиг. 112. Фиг. 113.

Фиг. 114. Фиг. 115.

Фиг. 116. Фиг. 117.



Фиг. 118.

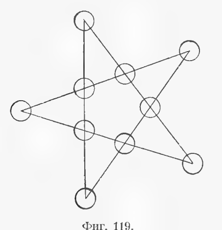
Задача 106-я.

Пять линій, 10 монетъ.

Начертите на бумагѣ пять прямыхъ линій и разложите на нихъ 10 монетъ такъ, чтобы на каждой линіи лежало по 4 монеты.

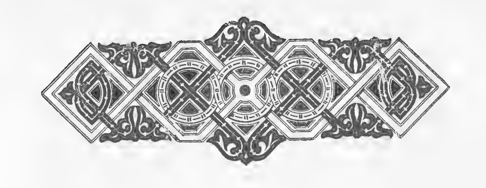
Рѣшеніе.

Фиг. 119 показываетъ, какъ рѣшается задача:



Фиг. 119.

Можно ли эту фигуру вычертить съ одного почерка?



Волшебная таблица.

5	4	3	2	1
16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31
16	**8**	**4**	**2**	**1**

Вотъ таблица, въ которой въ 5-ти столбцахъ выписаны извѣстнымъ образомъ всѣ числа отъ 1 до 31. Таблица эта отличается слѣдующимъ «волшебнымъ свойствомъ»:

Задумайте какое угодно число (но, конечно, не большее 31), и укажите только, въ какихъ столбцахъ этой таблицы находится задуманное вами число, и я тотчасъ же «угадаю» это число.

Если, напримѣръ, вы задумаете число 27, то, ничего не говоря иного, скажите только, что задуманное вами число находится въ 1-мъ, 2-мъ, 4-мъ и 5-мъ столбцахъ; а я уже самъ вамъ *навѣрное* скажу, что вы задумали именно число 27 (Можно это сказать, даже не смотря на таблицу).

Вмѣсто такой таблицы можно, если угодно, смастерить:

Волшебный вѣеръ.

Сдѣлайте сами, закажите или купите подходящій вѣеръ и на 5-ти пластинкахъ его выпишите изображенную выше таблицу. Можете, обвѣвая себя вѣеромъ, предлагать вашему собесѣднику задумать число и указать вамъ только пластинки, на которыхъ оно написано. Вы тотчасъ угадаете задуманное кѣмъ-либо число.

Но въ чемъ секретъ?

Разгадка.

Секретъ угадыванія съ виду простъ: обратите вниманіе на цифры, написанныя въ самой нижней графѣ. Если вамъ скажутъ, напримѣръ, что задуманное число находится во 2-мъ, 3-мъ и 5-мъ столбцѣ, считая слѣва, (или на 2-й, 3-й, 5-й пластинкѣ вѣера), то сложите числа, стоящія въ этихъ столбцахъ *внизу*, получите **22** $(2+4+16)$, и будьте увѣрены, что задумано именно это, а не иное какое число.

Въ правильности таблицы можете убѣдиться и такъ: задумайте сами число (не больше 31), напримѣръ 18. Вы найдете это число во 2-мъ и 5-мъ столбцахъ. Внизу этихъ столбцовъ

стоятъ числа 2 и 16; сложенныя вмѣстѣ, они даютъ, дѣйствительно, 18.

Но почему такъ? Какъ же составляется подобная таблица? Сколько можно составить такихъ таблицъ?

Полный и подробный отвѣтъ на это вы найдете дальше, въ главѣ о *двоичномъ счисленіи*, которую совѣтуемъ внимательно прочесть. Она даетъ много задачъ и объясняетъ сущность яко бы волшебной таблицы. Здѣсь же пока замѣтимъ только слѣдующее:

Если написать рядъ чиселъ, начиная съ 1, такихъ, чтобы каждое было вдвое больше предыдущаго, т. е.:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 и т. д. (Иначе говоря: рядъ послѣдовательныхъ *степеней* 2-хъ), то числа эти отличаются тѣмъ замѣчательнымъ свойствомъ, что изъ нихъ можно получать сложеніемъ рѣшительно *всѣ цѣлыя числа*, даже не входящія въ этотъ рядъ, и притомъ полученныя послѣдовательныя числа ряда войдутъ *только по одному разу*.

Въ нашей таблицѣ (или вѣерѣ) мы взяли только рядъ чиселъ 1, 2, 4, 8, 16 (2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4) и наглядно убѣждаемся, что съ помощью сложенія чиселъ этого ряда можно получить всѣ числа отъ 1 до 31, т. е. до 2^4—1. Впрочемъ, болѣе точное и строгое объясненіе всему этому вы найдете, какъ сказано, въ слѣдующей главѣ.

Тамъ же вы найдете рѣшеніе и объясненіе нижеслѣдующей интересной задачи.

Задача 107-я.

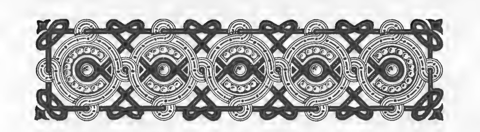
Въ лавкѣ бѣднаго торговца вмѣсто гирь было всего 4 камня. Однако, съ помощью этихъ камней онъ совершенно правильно взвѣшивалъ все въ цѣлыхъ фунтахъ, начиная съ одного фунта и до пуда, т. е. до 40 фунтовъ. Спрашивается: какого вѣса были эти камни.

Путемъ послѣдовательныхъ пробъ, пожалуй, нетрудно рѣшить эту задачу и найти, что камни должны быть вѣсомъ въ

1, 3, 9 и 27 фунтовъ. Но какъ найти *общее рѣшеніе* подобныхъ задачъ?

Все это разъяснится, если вы вникните въ слѣдующую главу. Но прежде чѣмъ взяться за ея чтеніе и изученіе, совѣтуемъ нашему читателю вновь продумать, что такое десятичная система счисленія, по которой считаетъ нынѣ все современное образованное человѣчество (См. также главу II-ю введенія: «Счетъ, мѣра и число»).





Двоичное счисленіе

О счисленіи вообще.

Умѣнье считать (счисленіе) очень часто разсматриваютъ, какъ основное ариѳметическое дѣйствіе, какъ начало всѣхъ дѣйствій, которыя можно производить надъ числами. *Это большое заблужденіе*, такъ какъ свойства чиселъ существуютъ независимо отъ всякой системы счисленія.

Счисленіе или счетъ есть чисто *условный языкъ*, позволяющій называть числа при помощи нѣсколькихъ немногихъ словъ въ разговорной рѣчи, или писать ихъ при помощи немногихъ знаковъ, *цифръ*, на письмѣ.

Основное дѣйствіе ариѳметики есть законъ образованія чиселъ, т. е. сложеніе. Наше десятичное счисленіе, наприм., есть уже дѣйствіе болѣе сложное. Оно заключаетъ въ себѣ одновременно сложеніе и умноженіе. Такъ, число 45 въ десятичной системѣ есть результатъ, полученный отъ умноженія 10 на 4 и затѣмъ прибавленія къ полученному пяти единицъ. Извѣстно, впрочемъ, что десятичная система счисленія есть сравнительно позднее созданіе человѣческой ариѳметики.

Само собой разумѣется, что вмѣсто того, чтобы считать числа десятками, сотнями (т. е. группами по десяти десятковъ), ты-

сячами (т. е. группами по десяти сотенъ) и т. д., можно было бы число *десять* замѣнить всякимъ другимъ,—напримѣръ, числомъ *двѣнадцать* (дюжиной), и считать дюжинами. Уже Аристотель замѣтилъ, что число *четыре* могло бы вполнѣ замѣнить *десять*. По этому поводу Вейгель въ 1687 г. даже предложилъ планъ *четверичной ариѳметики*.

Почти всеобщій выборъ числа десять за основаніе счисленія зависитъ, по всей вѣроятности, отъ устройства нашихъ рукъ (десять пальцевъ), точно также, какъ большинство различныхъ единицъ у древнихъ получили свое названіе и происхожденіе отъ различныхъ членовъ человѣческаго тѣла, какъ локоть, пядь и т. д.

Въ XVII вѣкѣ Мельхиседекъ Ѳевено (Thévenot) пытался найти всеобщую мѣру, исходя изъ правильности и равенства граней пчелиныхъ восковыхъ ячеекъ. Новѣйшія мѣры построены на болѣе прочныхъ основаніяхъ и взяты изъ геодезическихъ, физическихъ и др. соотношеній, какъ, *метръ, граммъ* и др.

Двоичная система.

Двоичная система счисленія есть счетъ, гдѣ въ *основаніе* кладется число 2.

Всякая система счисленія основана на употребленіи единицъ разныхъ разрядовъ, каждая изъ которыхъ содержитъ единицу предыдущаго разряда одно и то же число разъ. Число единицъ низшаго разряда, нужное для того, чтобы составить единицу высшаго, называется *основаніемъ* системы счисленія.

Это основаніе должно быть равно по меньшей мѣрѣ *двумъ*.

Въ самомъ дѣлѣ, если взять за основаніе системы *одинъ*, то единицы различныхъ разрядовъ будутъ равны между собой, и системы счисленія въ сущности не будетъ.

Первымъ знакомствомъ съ *двоичной ариѳметикой* мы обязаны Лейбницу. Въ этой системѣ за основаніе принято число *два*, и всѣ числа можно писать только цифрами *0* и *1*. При этомъ принимается единственное условіе, сходное съ письменнымъ счисленіемъ въ десятичной системѣ, именно,—что всякая цифра, помѣщенная сейчасъ влѣво, представляетъ единицы въ

два раза большія, чѣмъ стоящія непосредственно вправо. Слѣдовательно, по этой системѣ числа два, четыре, восемь, шестнадцать... напишутся такъ:

10, 100, 1000, 10000,...

Числа три, пять, одиннадцать, девятнадцать напишутся такъ:

11, 101, 1011, 10011,...

Слѣдуетъ, вообще, освоиться съ писаніемъ чиселъ по двоичной системѣ. Это легко.

Замѣчанія о двѣнадцатичной системѣ.

Симонъ Стевинъ изъ Брюгге (умеръ въ 1633 г.) предложилъ когда-то ввести двѣнадцатичную систему, какъ болѣе подходящую къ нашему обыкновенію считать мѣсяцы, года, часы дня, градусы окружности и т. д. Но измѣненіе существующей системы произвело бы слишкомъ большія неудобства сравнительно съ тѣми преимуществами, которыя получились бы, если принять число *двѣнадцать* за основаніе системы.

Позднѣе знаменитый Огюстъ Контъ замѣтилъ, что строеніе руки, имѣющей 4 пальца съ тремя суставами, или всего двѣнадцать суставовъ противъ двухъ еще суставовъ пятаго, большого, пальца, позволяетъ считать по пальцамъ всѣ числа до 13 разъ 12, ($13 \times 12 = 156$). Такимъ образомъ по двѣнадцатичной системѣ можно было бы легко вести на пальцахъ гораздо болѣе обширный счетъ, чѣмъ десятичный. Но отъ этой остроумной выдумки въ настоящее время не сохранилось ничего, кромѣ сравненія, сдѣланнаго самимъ Контомъ, что четыре пальца съ большимъ пальцемъ во главѣ напоминаютъ четырехъ солдатъ подъ командой капрала.

Преимущества двоичной системы.

Въ двоичной системѣ обыкновенныя ариѳметическія дѣйствія сведены къ самымъ простѣйшимъ выраженіямъ. Сложеніе, напримѣръ, сводится къ слѣдующему: **1** да **1** даетъ *два*, ставлю **0** и замѣчаю **1**. Таблицы умноженія (Пиѳагоровой) нѣтъ вовсе,

такъ какъ все умноженіе сводится къ слѣдующему: **1**, умноженная на **1**, даетъ единицу. Такъ что все умноженіе заключается въ соотвѣтствующемъ подписаніи частичныхъ произведеній. При дѣленіи не требуется никакихъ попытокъ. Кромѣ того, для этой системы удобнѣе, чѣмъ для всякой иной, изготовлять счетныя машины. Люка *), благодаря двоичному счисленію, нашелъ наибольшее изъ извѣстныхъ до сихъ поръ простыхъ чиселъ, а также изобрѣлъ машину, дающую весьма большія первоначальныя числа. Неудобство двоичной системы состоитъ въ большемъ количествѣ писанія, которое необходимо для изображенія небольшихъ сравнительно чиселъ.

Лежандръ въ своей *Теоріи чиселъ* даетъ способъ, довольно быстро ведущій къ цѣли, когда хотятъ изобразить большое число по двоичной системѣ. Пусть дано, напр., число 11 183 445. Дѣлимъ его на **64**. Получается остатокъ 21 и частное 174 741. Это послѣднее дѣлимъ опять на 64, получается въ остаткѣ 21 и частное 2 730. Наконецъ, 2 730, дѣленное на 64, даетъ въ остаткѣ 42 и частное 42. Но 64 въ двоичной системѣ есть 1 000 000; 21 въ двоичной системѣ есть **10 101**, а 42 есть **101 001**. Итакъ предложенное число напишется по двоичной системѣ такъ:

101 010 101 010 010 101 010 101

Же-кимъ.

Двоичная система счисленія позволяетъ объяснить одинъ китайскій символъ, носящій имя *Жекимъ*, или *Жекингъ*. Приписывается онъ Фо-хи, древнѣйшему законодателю Китая (за 3000 лѣтъ до Рожд. Христова). Символъ состоитъ изъ 64 небольшихъ фигуръ, образованныхъ каждая изъ шести находящихся одна надъ другой горизонтальныхъ линій; однѣ изъ этихъ линій сплошныя, другія имѣютъ въ серединѣ перерывъ. Символъ этотъ приводилъ въ отчаяніе какъ китайскихъ, такъ и европейскихъ ученыхъ, не могшихъ его удовлетворительно объяснить. Знаменитый Лейбницъ, разсматривая различныя начертанія Же-

*) Recherches sur plusieurs ouvrages de Leonard de Pise, et sur diverses questions d'arithmétique. — Rome. 1877.

кима сравнительно съ рядомъ чиселъ, написанныхъ по двоичной системѣ, нашелъ, что двоичная ариѳметика разрѣшаетъ загадку, и что Же-кимъ есть ничто иное, какъ рядъ 64 послѣдовательныхъ первыхъ чиселъ, написанныхъ по двоичной системѣ, но въ обратномъ порядкѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если обозначимъ единицу сплошной прямой ————, а нуль, прямой съ перерывомъ посреди —— ——, если кромѣ того условимся единицы слѣдующихъ высшихъ разрядовъ писать не справа

Видъ Китайскаго Же-кима	Переводъ на двоичную систему	По десятичной системѣ
	000000	0
	000001	1
	000010	2
	000011	3
	000100	4
	000101	5

налѣво, но снизу вверхъ, то нетрудно найти, что этотъ китайскій символъ, составленный изъ повтореній 6-ти горизонтальныхъ линій, можетъ быть истолкованъ такъ, какъ это указано на таблицѣ, помѣщенной на этой страницѣ.

Въ этой столь удачно имъ разгаданной загадкѣ Лейбницъ видѣлъ также символъ творенія изъ ничего по волѣ Бога, подобно тому, какъ, говорилъ онъ, всѣ числа въ двоичной системѣ составляются изъ нуля и единицы. Мысль эта такъ понравилась знаменитому философу, что онъ сообщилъ ее тогдашнему миссіонеру въ Китаѣ, П. Буве, убѣждая его развить ее

передъ царствовавшимъ императоромъ и такимъ путемъ обратить его въ христіанство... Впрочемъ, можно быть увѣреннымъ, что геніальный ученый не придавалъ этой своей пиѳагорейской идеѣ большаго значенія, чѣмъ она того стоитъ.

Для большей ясности представленія о Же-кимѣ приведемъ первыя 16 фигуръ его. Вотъ онѣ:

000000	000001	000010	000011
нуль	одинъ	два	три
000100	000101	000110	000111
четыре	пять	шесть	семь
001000	001001	001010	001011
восемь	девять	десять	одиннадцать
001100	001101	001110	001111
двѣнадцать	тринадцать	четырнадцать	пятнадцать

Ящикъ съ гирями.

Напишемъ по двоичной системѣ таблицу 32 чиселъ:

1	1	9	1001	17	10001	25	11001
2	10	10	1010	18	10010	26	11010
3	11	11	1011	19	10011	27	11011
4	100	12	1100	20	10100	28	11100
5	101	13	1101	21	10101	29	11101
6	110	14	1110	22	10110	30	11110
7	111	15	1111	23	10111	31	11111
8	1000	16	10000	24	11000	32	100000

Легко эту таблицу продолжить до какихъ угодно предѣловъ, и такимъ образомъ вывести то общее правило, *что любое число можно получить путемъ сложенія различныхъ степеней двухъ съ прибавкой единицы*, т. е. каждое число можно получить путемъ сложенія изъ ряда:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, . . .

при чемъ при такомъ сложеніи ни одно изъ чиселъ ряда не требуется брать дважды. Этимъ свойствомъ можно пользоваться въ торговлѣ и промышленности. Если намъ требуется взвѣсить цѣлое число, напр., граммовъ (или фунтовъ, лотовъ, пудовъ,— словомъ, какихъ угодно единицъ вѣса), то можно пользоваться ящикомъ, въ которомъ находятся разновѣски такихъ тяжестей:

1 gr, 2 gr, 4 gr, 8 gr, 16 gr, 32 gr...

Съ шестью такими гирями можно взвѣшивать до 63 gr. Съ числомъ n такихъ гирь можно взвѣшивать до тяжестей, получаемыхъ изъ формулы

$$2^n - 1.$$

На практикѣ, однако, ящики съ гирями устраиваются иначе. Во Франціи и другихъ образованныхъ странахъ (почти вездѣ кромѣ Россіи), гдѣ принята десятичная система мѣръ и вѣсовъ, эти ящики содержатъ граммы, декаграммы, гектограммы и килограммы*) въ такомъ порядкѣ:

1 gr 2 gr 2 gr 5 gr
1 dg 2 dg 2 dg 5 dg
1 hg 2 hg 2 hg 5 hg
1 kg 2 kg 2 kg 5 kg

и т. д. Ясно, что изъ чиселъ 1, 2, 2, 5 можно составить всѣ остальныя до 10. Кромѣ того подобное устройство ящика съ разновѣсками болѣе подходитъ къ десятичной системѣ счисленія, и подобной же системѣ мѣръ и вѣсовъ, — слѣдовательно, при навыкѣ не требуесъ почти никакого соображенія. Но если посмотрѣть на дѣло съ иной стороны, то при двоичной системѣ для взвѣшиванія до извѣстнаго предѣла требуется меньше гирь, чѣмъ при десятичной.

*) 10 gr = 1 dg; 10 dg = 1 hg; 10 hg = 1 kg.

Взвѣшиваніе.

Составимъ такой рядъ чиселъ, въ которомъ первый членъ будетъ единица, а затѣмъ идутъ степени 3-хъ, т. е.:

1, 3, 9, 27, 81,...

Онъ обладаетъ свойствомъ, состоящимъ въ томъ, что, *складывая или вычитая извѣсенымъ образомъ его члены, мы также получимъ всевозможныя цѣлыя числа.* Доказать это не трудно, и мы останавливаться на этомъ не будемъ.

Свойствомъ этого ряда можно воспользоваться также для того, чтобы взвѣшивать съ наименьшимъ количествомъ различныхъ гирь предметы, вѣсъ которыхъ можно выразить въ цѣлыхъ числахъ. Такъ, напримѣръ, при помощи перекладыванія гирь на различныя чашки вѣсовъ можно взвѣсить въ цѣлыхъ фунтахъ всѣ тяжести отъ 1-го фунта до цѣлаго пуда при помощи всего четырехъ гирь въ

1 ф., 3 ф., 9 ф., 27 ф.

При помощи пяти гирь въ 1, 3, 9, 27 и 81 фунтъ можно взвѣшивать въ цѣлыхъ фунтахъ всѣ тяжести отъ 1-го до 121 фунта и т. д. Вообще съ помощью n гирь вѣсомъ въ

$$1,\ 3,\ 3^3,\ 3^4;\dots\ 3^n - 1 \text{ фунта}$$

можно взвѣшивать всѣ тяжести до вѣса въ

$$\frac{1}{2}(3^n - 1) \text{ фунтовъ.}$$

Слѣдовательно, геометрическая прогрессія со знаменателемъ отношенія 3 разрѣшаетъ такую общую задачу: *Найти наименьшее число гирь, съ помощью которыхъ можно произвести всѣ взвѣшиванія въ цѣлыхъ числахъ отъ 1 до суммы вѣса всѣхъ взятыхъ тяжестей; и эта сумма должна быть наибольшей относительно числа тяжестей.*

Еще о волшебной таблицѣ.

Воспользуемся таблицей, составленной нами ранѣе на страницѣ 224, для построенія новой, обладающей свойствомъ, заслуживающимъ вниманія. Эту новую таблицу составимъ такъ:

Въ первомъ столбцѣ, справа, выпишемъ одно подъ другимъ

изъ таблицы на страницѣ 224 всѣ тѣ числа по десятичной системѣ, которымъ въ двоичной системѣ соотвѣтствуютъ числа, оканчивающіяся на 1. Затѣмъ во второмъ столбцѣ, считая справа налѣво, выпишемъ всѣ тѣ числа, у которыхъ по двоичной системѣ вторая цифра съ конца есть 1. Въ третьемъ столбцѣ выпишемъ всѣ тѣ числа, у которыхъ по двоичной системѣ третья цифра съ конца есть 1, и т. д. Въ нашемъ случаѣ, очевидно, придется остановиться на 5-мъ столбцѣ, и наибольшее число, входящее въ составляемую таблицу, есть 31. (Вообще же для n-аго столбца такое наибольшее число будетъ $2^n - 1$). Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующую таблицу:

5	4	3	2	1
16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31

По этой таблицѣ можно угадать всякое задуманное кѣмъ либо число, если оно, конечно, не болѣе 31. Въ самомъ дѣлѣ, предложите кому либо задумать любое число, не большее 31, и указать, въ какихъ столбцахъ оно находится. Если, начиная отъ правой руки къ лѣвой, мы будемъ писать 1 для всякаго столбца, гдѣ задуманное число находится, и 0 для такого столбца,

гдѣ этого числа нѣтъ, то получимъ задуманное число, написанное по двоичной системѣ. Задача облегчается если внизу столбцовъ написать соотвѣтствующія степени двухъ и затѣмъ, чтобы узнать задуманное число, остается только узнать, въ какихъ столбцахъ оно находится, и сложить соотвѣтственныя находящіяся внизу числа. Можно, впрочемъ, этихъ степеней двухъ и не подписывать внизу, такъ какъ они написаны нами уже въ первой строкѣ составленной нами таблицы (1, 2, 4, 8, 16).

Вмѣсто таблицы можно сдѣлать изъ картона *волшебный вѣеръ* и на пластинкахъ его написать соотвѣтствующія числа. Это разсмотрѣно уже нами на стр. 215—217. Здѣсь мы освѣщаемъ все это съ болѣе общей точки зрѣнія.

Двоичная прогрессія.

Возьмемъ число 2 и удвоимъ его, полученное число опять удвоимъ, полученное снова удвоимъ, полученное снова удвоимъ и т. д. То есть, другими словами, составимъ таблицу степеней числа двухъ, начиная съ первой и до 32 степени:

Степень n	2^n	Степень n	2^n
1	2	17	131 072
2	4	18	262 144
3	8	19	524 288
4	16	20	1 048 576
5	32	21	2 097 152
6	64	22	4 194 304
7	128	23	8 388 608
8	256	24	16 777 216
9	512	25	33 554 432
10	1 024	26	67 108 864
11	2 048	27	134 217 728
12	4 096	28	268 435 456
13	8 192	29	536 870 912
14	16 384	30	1 073 741 824
15	32 768	31	2 147 483 648
16	65 536	32	4 294 967 296

Эта таблица представляетъ тотъ рядъ чиселъ, который Ферма (Fermat) назвалъ *двоичной прогрессіей*. Нетрудно провѣрить съ помощью этой таблицы, что для перемноженія какихъ-либо степеней 2, — наприм., девятой и одиннадцатой, — достаточно показателей этихъ степеней сложить. Т. е. $2^9 \times 2^{11} = 2^{20}$; или $512 \times 2\,048 = 1\,048\,576$.

Вообще: показатель произведенія двухъ степеней одного и того же числа равенъ суммѣ обоихъ показателей, а показатель частнаго двухъ степеней одного и того же числа равенъ разности показателей дѣлимаго и дѣлителя.

На разсмотрѣніи и обобщеніи этихъ свойствъ показателей степеней основана *теорія логариѳмовъ*.

Замѣтимъ также, что, имѣя предыдущую таблицу, мы весьма быстро можемъ вычислить 64-ю степень 2-хъ, перемножая само на себя 32-ю степень этого числа. т. е.

$$2^{64} = 2^{32} \times 2^{32} = 4\,294\,967\,296 \times 4\,294\,967\,296 =$$
$$= 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616.$$

Съ этимъ послѣднимъ числомъ, уменьшеннымъ на 1, связано извѣстное математическое преданіе, указанное нами въ главѣ о шахматахъ объ изобрѣтателѣ шахматной игры.

Совершенныя числа.

Двоичная прогрессія приводитъ къ познанію такъ называемыхъ *совершенныхъ чиселъ*. Такъ называется всякое цѣлое число, сумма всѣхъ дѣлителей котораго равна самому числу, предполагая, конечно, что само число исключено изъ этихъ дѣлителей.

Теорія нечетныхъ совершенныхъ чиселъ не разработана вполнѣ еще до сихъ поръ. Что касается до четныхъ совершенныхъ чиселъ, то всѣ они безъ исключенія содержатся въ формулѣ.

$$\mathbf{N} = \mathbf{2^{a-1}\,(2^a - 1)},$$

гдѣ второй множитель, $2^a - 1$, долженъ быть первоначальнымъ числомъ. Слѣдовательно, въ этой формулѣ **a** нужно придавать

только тѣ значенія, для которыхъ число $2^a - 1$ есть первоначальное число. Это было извѣстно еще Эвклиду, но этотъ геометръ не могъ доказать, что такимъ путемъ получаются *всѣ* четныя совершенныя числа.

Число $2^a - 1$ можетъ быть первоначальнымъ только въ томъ случаѣ, если показатель **a** есть число первоначальное. Это доказать не трудно, но этого недостаточно. Необходимо еще удостовѣриться, что число $2^a - 1$ есть дѣйствительно первоначальное число. При настоящемъ состояніи высшей ариѳметики эта задача въ общемъ случаѣ неразрѣшима, если только показатель **a** больше 100. Совершенныя числа, извѣстныя нынѣ, суть слѣдующія восемь чиселъ, заключающихся въ нижеслѣдующей таблицѣ:

a	2^{a-1}	$2^a - 1$	Совершенныя числа.
2	2	3	6
3	4	7	28
5	16	31	496
7	64	127	8 128
13	4 096	8 191	335 550 336
17	65 536	131 071	8 589 869 056
19	262 144	524 287	137 438 691 328
31	1 073 741 824	2 147 483 647	2 305 843 008 139 952 128

Въ первомъ столбцѣ мы не находимъ для **a** значеній 11, 23, 29. Это потому, что соотвѣтствующія числа $2^{11}-1$, $2^{23}-1$, $2^{29}-1$ не суть первоначальныя, а дѣлятся соотвѣтственно на 23, 47 и 233.

Мы видимъ, что совершенныя четныя числа оканчиваются на 6 или 8. И можно доказать, что такъ будетъ постоянно для всякаго подобнаго совершеннаго числа.





Угадываніе чиселъ.

О какомъ *угадываніи* идетъ рѣчь?

Конечно, дѣло, въ сущности, сводится не къ отгадкѣ, а къ *рѣшенію* нѣкоторой задачи. Желающему предлагаютъ задумать нѣкоторое число и этого числа у него не спрашиваютъ. Взамѣнъ этого предлагаютъ задумавшему произвести надъ задуманнымъ имъ числомъ разныя съ виду совсѣмъ произвольныя дѣйствія и сказать «угадывающему», что въ результатѣ получилось. «Угадчикъ» получаетъ, такимъ образомъ, въ руки конецъ нити, по которой разматываетъ весь клубокъ и добирается до начала.

Задаваемыя въ остроумной и забавной формѣ, которую каждый играющій можетъ придумать по своему вкусу, задачи эти составляютъ очень хорошее и полезное развлеченіе для всѣхъ играющихъ. Онѣ развиваютъ навыки въ быстромъ умственномъ счетѣ и развиваютъ ихъ постепенно, такъ какъ можно задумывать малыя и большія числа, смотря по желанію и силамъ участвующихъ въ игрѣ лицъ. Теоретическія основанія подобныхъ задачъ настолько просты, что мы даемъ ихъ сжато и кратко. Впрочемъ, если «доказательства» въ нашемъ изложеніи кому-либо окажутся не по силамъ, то онъ можетъ ихъ смѣло опустить, а пусть разберется только въ самой задачѣ. Разобравшись, онъ, почти навѣрное, самъ дойдетъ до доказательства и объясненія каждой задачи.

Обращаемъ вниманіе на то, что здѣсь въ большинствѣ случаевъ даются только сравнительно сухіе остовы задачъ. Читателю предоставляется самая широкая возможность каждое условіе подобной задачи украсить плодами собственной выдумки и фантазіи или приноровить къ извѣстному случаю.

Развивайте въ себѣ самостоятельность мышленія и сметку!

Задача 108-я.

Угадать задуманное кѣмъ-либо число.

Задумайте число.

Утройте его.

Возьмите половину полученнаго числа, если оно дѣлится безъ остатка на 2; если же оно ровно пополамъ не дѣлится, то прибавьте сначала единицу, а потомъ возьмите половину числа.

Эту половину опять утройте.

Сколько разъ *содержится 9 въ полученномъ* теперь числѣ?

Если затѣмъ на каждую такую девятку взять по два, то и получится задуманное число.

Нужно имѣть только въ виду, что если приходится прибавлять единицу, чтобы раздѣлить число нацѣло пополамъ, то къ числу найденному, взявъ по 2 на каждую девятку, также нужно прибавить единицу.

Примѣры. Задумано 6. Послѣ утроенія получается 18. Половина этого числа равна 9. Утроивъ, получаемъ 27. Въ этомъ числѣ 9 заключается 3 раза. Беремъ 3 раза по 2, и получимъ задуманное число 6.

Пусть задумано 5. Утроивая, получимъ 15. Чтобы раздѣлить пополамъ нацѣло, нужно прибавить 1, получится 16. Половина отъ 16 равна 8; утроивая, получаемъ 24. Въ этомъ числѣ 9 содержится 2 раза. Беремъ 2 раза по 2, получаемъ 4, да еще нужно прибавить единицу, такъ какъ приходилось прибавлять единицу, чтобы раздѣлить пополамъ нацѣло. Итакъ, задуманное число равно 5.

Доказательство.

Если задумано **четное** число, т. е. вида **$2n$**, то надъ нимъ производятся слѣдующія дѣйствія.

$2n \times 3 = 6n$; $6n : 2 = 3n$; $3n \times 3 = 9n$; $9n : 9 = n$; $n \times 2 = 2n$.

Если задумано число **нечетное**, т. е. вида $2n + 1$, то тѣ же дѣйствія принимаютъ такой видъ:

$$(2n+1)\times 3 = 6n + 3;\ 6n + 3 + 1 = 6n + 4;$$
$$(6n+4) : 2 = 3n + 2;\ (3n+2)\times 3 = 9n + 6;$$
$$(9n+6) : 9 = n;\ n \times 2 + 1 = 2n + 1.$$

Такимъ образомъ, поступая, какъ объяснено выше, мы всегда должны придти къ задуманному числу.

Задача 109-я.

Видоизмѣненіе той же задачи.

Утроить задуманное число, затѣмъ взять половину произведенія, если же произведеніе получится нечетное, то прибавить къ нему единицу и потомъ раздѣлить пополамъ. Утроить снова эту половину, затѣмъ взять половину полученнаго числа, прибавляя, какъ выше, единицу, если отъ умноженія на 3 получится нечетное число. Затѣмъ надо спросить, сколько разъ содержится 9 въ этой послѣдней половинѣ, и на каждую девятку взять по 4. При этомъ нужно имѣть въ виду, что если при дѣленіи на два въ первый разъ приходилось прибавлять единицу, то угадывающему нужно тоже держать въ умѣ единицу, а если при дѣленіи и во второй разъ приходилось прибавлять единицу, то нужно запомнить еще 2. Слѣдовательно, если оба раза дѣленіе на 2 не могло быть выполнено нацѣло безъ прибавленія 1, то, взявъ на каждую девятку по 4, нужно къ полученному числу прибавить еще 3; если же дѣленіе пополамъ нацѣло не выполняется только въ первый разъ, то прибавляется 1; а если только во второй, то прибавляется 2.

Напримѣръ: задумано 7; утроивая, получимъ 21; чтобы раздѣлить пополамъ нацѣло, надо прибавить 1; прибавляя ее и дѣля 22 пополамъ, получимъ 11; по утроеніи получимъ 33; чтобы взять половину, опять нужно прибавить единицу, послѣ чего получимъ 34, половина этого числа есть 17. Здѣсь 9 содержится только одинъ разъ. Слѣдовательно, нужно взять число 4 и къ нему прибавить еще 3, такъ какъ дѣленіе и въ первомъ, и во второмъ случаѣ совершалось лишь послѣ прибавленія единицы.

Получается: $4+3=7$, т. е. задуманное число.

Доказательство.

Всякое число можетъ быть представлено въ одной изъ слѣдующихъ формъ:

$$4n,\ 4n+1,\ 4n+2,\ 4n+3,$$

гдѣ буквѣ n нужно придавать значенія 0, 1, 2, 3, 4 и т. д.

1) Возьмемъ сначала число вида $4n$ и произведемъ надъ нимъ указанныя выше дѣйствія. Получается:

$$4n\times 3=12n;\ 12n:2=6n;\ 6n\times 3=18n;\ 18n:2=9n.$$
$$9n:9=n;\ 4\times n=4n.$$

2) Для числа вида $4n+1$ получимъ:

$$(4n+1)\times 3=12n+3;\ 12n+3+1=12n+4;$$
$$(12n+4):2=6n+2;\ (6n+2)\times 3=18n+6;$$
$$(18n+6):2=9n+3;\ (9n+3):9=n;\ 4\times n+1=4n+1.$$

3) Для числа вида $4n+2$ имѣемъ:

$$(4n+2)\times 3=12n+6;\ (12n+6):2=6n+3;$$
$$(6n+3)\times 3=18n+9;\ 18n+9+1=18n+10;$$
$$(18n+10):2=9n+5;\ (9n+5):9=n;$$
$$4\times n+2=4n+2.$$

4) Для числа вида $4n+3$ имѣемъ:

$$(4n+3)\times 3=12n+9;\ 12n+9+1=12n+10;$$
$$(12n+10):2=6n+5;$$

$(6n+5)\times 3 = 18n+15$; $18n+15+1 = 18n+16$;
$(18n+16):2 = 9n+8$;
$(9n+8):9 = n$; $4\times n+3 = 4n+3$.

Такимъ образомъ, поступая по правилу, мы всегда получимъ задуманное число.

Можно ту же задачу предложить и въ нѣсколько измѣненномъ видѣ,—а именно:

Задумайте число; прибавьте къ нему половину того же числа; къ полученной суммѣ прибавьте половину этой же суммы.

Затѣмъ надо спросить, сколько разъ содержится девять въ послѣднемъ полученномъ числѣ, и взять по 4 на каждую девятку, какъ выше. Но и здѣсь, какъ всегда, нужно помнить, что если въ первомъ случаѣ число не дѣлится нацѣло на два, то нужно прибавить къ нему единицу и затѣмъ подѣлить на двѣ равныя части; точно также нужно поступать и во второмъ случаѣ. А затѣмъ, если дѣленіе нацѣло не выполнялось только въ первомъ случаѣ, то угадывающій долженъ держать въ умѣ 1, если только во второмъ, то 2, а если и въ первомъ и во второмъ, то 3, и эти числа соотвѣтственно потомъ прибавлять для полученія правильнаго отвѣта.

Напримѣръ,—задумано 10; прибавляя къ нему его половину, получимъ 15,—число нечетное,—поэтому, прибавляя къ нему 1 и беря половину, получимъ 8; прибавляя 8 къ 15-ти, получимъ 23; въ этомъ числѣ 9 содержится 2 раза. Два раза по четыре равно 8, но къ 8 надо прибавить еще 2, потому что во второмъ случаѣ, чтобы раздѣлить на 2 нацѣло, приходилось прибавлять 1. Итакъ: $8+2=10$, т. е. получаемъ задуманное число.

Если число нечетное, то раздѣлимъ его на двѣ такія части, чтобы одна была на единицу больше другой, и условимся для краткости называть первое слагаемое *бóльшей половиной*, а второе — меньшей. Тогда разсматриваемую нами задачу можно продѣлать еще въ одной довольно интересной формѣ.

Задумайте число. Прибавьте къ нему его половину или, если оно нечетное, то его бóльшую половину. Къ этой суммѣ

прибавьте ея половину или, если она нечетна, то ея большую половину. Сколько разъ въ полученномъ числѣ содержится 9?

Взявши затѣмъ по 4 на каждую девятку, задумавшему число надо предложить такіе вопросы: если отъ послѣдней суммы отнять всѣ девятки, то можно ли отъ остатка отнять еще 8? Если можно, то, значитъ, чтобы получить задуманное число, нужно къ числу, полученному отъ умноженія 4-хъ на число девятокъ, прибавить 3.

Если же нельзя отнять 8, то надо спросить, нельзя ли отнять 5. Если можно, то нужно прибавить 2. Если же 5-ти нельзя вычесть, то спросить, нельзя ли вычесть 3, и если можно, то прибавляется 1.

Легко убѣдиться, что задача, предложенная въ этой послѣдней формѣ, сводится, въ сущности, къ предыдущимъ, потому что утроить число и взять потомъ половину полученнаго произведенія, это все равно, что прибавить къ числу его половину и т. д.

Замѣчанія. Понявшій и всесторонне усвоившій доказательства двухъ приведенныхъ выше задачъ въ ихъ различныхъ видоизмѣненіяхъ можетъ самъ легко создать множество правилъ, подобныхъ предыдущимъ, для угадыванія задуманнаго числа.

Можно, наприм., заставить утроить задуманное число, затѣмъ взять половину полученнаго произведенія, эту половину предложить умножить уже на 5 и взять половину произведенія. Вслѣдъ затѣмъ спросить, сколько разъ въ этой послѣдней половинѣ заключается число 15, и для каждыхъ 15 взять по 4. При этомъ, какъ и раньше, нужно къ произведенію четырехъ на число содержащихся въ послѣдней половинѣ 15 прибавлять 1, 2 или 3, смотря по тому, когда дѣленіе на 2 не совершается нацѣло: въ первомъ случаѣ, во второмъ, или въ обоихъ вмѣстѣ.

Внимательный читатель легко все это докажетъ самъ. Къ руководству его добавимъ только, что при доказательствѣ онъ убѣдится въ слѣдующемъ:

Если задуманное число превышаетъ какое-либо **двойно-четное** *) число на 1, то, отнявъ всѣ 15, которыя содержатся

*) Будемъ называть **двойно-четнымъ** или **четно-четнымъ** числомъ такое число, которое дѣлится на 4, и **просто-четнымъ,** которое дѣлится на 2 и не дѣлится на 4.

въ послѣдней половинѣ, найдемъ, что въ остаткѣ заключается еще 5. Если задуманное число превышаетъ какое-либо двойно-четное число на 2, то въ остаткѣ послѣ дѣленія послѣдней половины на 15 будетъ заключаться 8; и если, наконецъ, задуманное число превышаетъ двойно-четное на 3, то въ остаткѣ получится 13.

Замѣтивъ это, можно, угадывая число, разнообразить свои вопросы по тому или другому изъ вышеприведенныхъ образцовъ.

Можно также, напр., предложить умножить задуманное число на 5, взять половину полученнаго произведенія, эту половину опять умножить на пять и полученное снова раздѣлить на 2, а затѣмъ спросить, сколько разъ въ полученномъ числѣ заключается 25, и для каждыхъ 25 взять по 4. При этомъ нужно имѣть въ виду опять-таки случаи, когда дѣленіе на 2 совершается нацѣло, и когда нѣтъ, чтобы прибавить 1, 2 или 3, гдѣ слѣдуетъ, или же не прибавлять ничего, если дѣленіе на 2 въ обоихъ случаяхъ было нацѣло.

Словомъ, предложенныя задачи можно разнообразить всячески.

Задача 110-я.

Угадать задуманное число инымъ способомъ.

Сначала нужно поступать, какъ въ предыдущихъ задачахъ, т. е. предложить утроить задуманное число, взять половину (или **большую** половину) полученнаго произведенія, утроить эту половину и взять снова половину (или бо́льшую половину) полученнаго числа. Но затѣмъ, вмѣсто вопроса, сколько разъ въ этой послѣдней половинѣ содержится 9, можно попросить назвать всѣ цифры, которыми пишется это послѣднее число, **кромѣ одной**, лишь бы эта неизвѣстная отгадывающему цифра **не была нуль.**

Точно также необходимо, чтобы загадывающій сказалъ и *порядокъ* цифръ—какъ тѣхъ, которыя уже имъ названы, такъ и той, которая угадывающему еще неизвѣстна.

Послѣ этого, чтобы узнать задуманное число, надо сложить всѣ цифры, которыя названы, и отбросить отъ этой суммы 9 столько разъ, сколько возможно. Остатокъ, который послѣ этого получится, надо вычесть изъ 9, и тогда получится неизвѣстная цифра; или же, если остатокъ будетъ нуль, то неизвѣстная цифра и есть 9. Поступаютъ именно такъ въ томъ случаѣ, если оба раза дѣленіе пополамъ совершалось нацѣло. Если же, чтобы раздѣлить число пополамъ, приходилось прибавлять 1 въ первый разъ, то нужно сначала къ суммѣ извѣстныхъ цифръ прибавить еще *6* и поступать затѣмъ, какъ указано.

Если же для дѣленія пополамъ приходилось прибавить 1 только второй разъ, то къ той же суммѣ нужно добавлять *4*.

Если же въ обоихъ случаяхъ дѣленіе не совершалось сразу нацѣло и приходилось прибавлять по 1, то къ сказанной суммѣ нужно прибавить *1*.

Нашедши, такимъ образомъ, неизвѣстную цифру послѣдней половины, мы узнаемъ и самую половину. Узнавъ же, сколько разъ въ ней заключается по 9, взявъ соотвѣтственное число разъ по 4 и прибавляя, когда нужно, 1, 2 или 3, получимъ искомое задуманное число.

Напр.: задумано 24. Утроивъ и раздѣливъ два раза, находимъ, что послѣдняя половина есть 54. Пусть задумавшій число назоветъ угадывающему первую цифру 5. Тогда вычитаніемъ 5 изъ 9 тотчасъ получается вторая цифра 4. Итакъ, послѣдняя половина есть 54. Въ ней 9 содержится 6 разъ.

Слѣдовательно, задуманное число есть $4 \times 6 = 24$.

Положимъ еще, что задумано 25. Утраивая и беря половину произведенія, утраивая эту половину и беря снова половину, находимъ 57. Но нужно помнить, что въ первомъ случаѣ, чтобы получить половину, приходилось прибавлять 1; поэтому, если задумавшій число объявитъ, напр., первую цифру 5, то надо къ пяти прибавить 6, получится 11, отбрасывая 9, получимъ 2, вычитая 2 изъ 9, получимъ вторую цифру 7. Итакъ, вторая половина 57; въ ней 9 содержится 6 разъ. Отсюда задуманное число равно $4 \times 6 + 1 = 25$.

Пусть еще задумавшій число скажетъ, что послѣдняя полученная имъ половина числа состоитъ изъ 3-хъ цифръ, что

двѣ послѣднія цифры суть 13, и что для дѣленія пополамъ нацѣло приходилось во второй разъ прибавлять единицу. Въ такомъ случаѣ къ суммѣ $1+3=4$ нужно прибавить еще 4, получается 8. Вычитая 8 изъ 9, получимъ единицу. Слѣдовательно, послѣдняя половина есть 113; въ ней 9 содержится 12 разъ. Поэтому задуманное число есть $4 \times 12 + 2 = 50$.

Точно также, если бы задумавшій число сказалъ, что послѣ утроеній и дѣленій на два онъ получилъ трехзначное число, въ которомъ первая цифра 1, а послѣдняя 7, и что въ обоихъ случаяхъ при дѣленіи на 2 приходилось прибавлять по 1, то на основаніи предыдущаго поступаемъ такъ: $1+7+1=9$. Отбрасывая 9, получимъ въ остаткѣ нуль, т. е. неизвѣстная цифра послѣдней половины есть 9, и сама эта половина есть 197, гдѣ 9 заключается 21 разъ. Отсюда по предыдущему заключаемъ, что задуманное число есть $4 \times 21 + 3 = 87$.

Доказательство.

Обращаясь къ доказательству, данному для задачи 109-й, находимъ, что для числа вида $4n$ окончательный результатъ вычисленій даетъ $9n$, т. е. **число кратное 9-ти.** Слѣдовательно, сумма цифръ этого числа должна дѣлиться на 9, а отсюда заключаемъ, что неизвѣстная намъ цифра такова, что, сложивъ ее съ остальными извѣстными цифрами, мы должны получить число, дѣлящееся на 9 (т. е. кратное девяти). Если же сумма извѣстныхъ намъ цифръ кратна 9, то, значитъ, неизвѣстная цифра сама есть 9, ибо намъ дано, что она не нуль.

Для числа вида $4n+1$ результатъ вычисленій есть $9n+3$, прибавляя сюда 6, получаемъ число кратное 9; т. е. кратна 9-ти и сумма его цифръ.

Для числа вида $4n+2$ результатъ вычисленій даетъ $9n+5$; прибавляя 4, получаемъ число кратное 9; слѣдовательно, и сумма его цифръ должна быть кратной 9.

Наконецъ, для числа вида $4n+3$ окончательный результатъ вычисленій даетъ $9n+8$; прибавляя 1, находимъ число кратное 9-ти.

Сумма его цифръ также должна быть кратной девяти.

Итакъ, указанныя нами выше правила вѣрны.

Задача 111-я.

Иное рѣшеніе задачи.

Можно предложить удвоить задуманное число и затѣмъ къ полученному произведенію прибавить 5. Затѣмъ полученное число взять пять разъ и прибавить къ полученному 10. Эту послѣднюю сумму умножить еще на 10. Если спросить затѣмъ, какое, въ концѣ концовъ, получилось число, и отнять отъ него 350, то **число** оставшихся **сотенъ** и будетъ задуманное число.

Напримѣръ: Пусть задумано 3. По удвоеніи его получается 6; прибавленіемъ 5 получается 11, взять пять разъ 11—получится 55; прибавить сюда 10,—получится 65; увеличить 10 разъ—получится 650. Если отнять отсюда 350, останется 300, т. е. **три** сотни. Итакъ, задуманное число есть 3.

Доказательство.

Надъ задуманнымъ числомъ n совершаются слѣдующія дѣйствія:

$$n\times 2+5=2n+5;\ (2n+5)\times 5=10n+25;\ 10n+25+10=$$
$$=10n+35; (10n+35)\times 10=100n+350; 100n+350-350=100n.$$
$$100n:100=n.$$

Т. е. всегда получится задуманное число.

Замѣчанія. Разсматривая предыдущее доказательство, не трудно понять, что послѣдней задачѣ можно придать любое число различныхъ видоизмѣненій. Такъ, напр., если пожелать. чтобы всегда въ результатѣ число сотенъ выражало задуманное число, и чтобы приходилось помножать всегда на 2, 6 и 10, но вычитать приходилось бы не 350, какъ въ приведенной задачѣ, а другое число,—то нужно принять во вниманіе, ка̀къ получилось въ вышеприведенной задачѣ 350. Это число произошло такъ: прибавлено 5, да умножено на 5, итого 25; къ этому числу прибавлено 10, получилось 35; умноживъ же это число на 10, получаемъ 350. Слѣдовательно, если пожелать вмѣсто 350 вычитать изъ окончательнаго результата другое

число, то и задавать нужно прибавлять не 5 и 10, а другія числа. Зададимъ, напримѣръ, вмѣсто 5 прибавить 4, а вмѣсто 10 прибавить 12. Ясно, что изъ послѣдняго полученнаго числа придется вычесть 320, ($4\times5=20$; $20+12=32$; $32\times10=320$); и тогда получимъ остатокъ, **число сотенъ** котораго и дастъ намъ задуманное число. Такимъ образомъ задачу можно видоизмѣнить до безконечности.

Точно также легко замѣтить, что, умножая задуманное число на 2, на 5 и на 10, мы умножаемъ его, въ сущности, на 100, ($2\times5\times10=100$).

Поэтому, желая опять-таки, чтобы число сотенъ окончательнаго результата показывало задуманное число,—все равно, какіе множители выбрать, лишь бы умноженіе на нихъ давало въ окончательномъ результатѣ умноженіе на 100. Отсюда слѣдуетъ, что, оставляя тѣ же множители 2, 5, 10, можно измѣнить ихъ порядокъ, т. е. сначала умножить, напр., на 5, потомъ на 10, а затѣмъ на 2 и т. д.

Точно также вмѣсто множителей 2, 5, 10 можно брать другіе, дающіе въ произведеніи 100, напр., 5, 4, 5 или 2, 2, 25 и т. д. Нужно помнить только при этомъ, конечно, что всѣмъ этимъ измѣненіямъ множителей и прибавляемыхъ чиселъ соотвѣтствуетъ измѣненіе числа, которое въ концѣ нужно вычесть. Такъ, напр., будемъ помножать на 5, 4, 5, а прибавлять числа 6 и 9, и пусть задуманное число будетъ 8.

Умноживъ на 5, получимъ 40; прибавивъ 6, получимъ $40+6=46$; умноживъ на 4, получимъ $160+24=184$; прибавивъ 9, получимъ $160+33=193$; умноживъ это число на 5, получимъ $800+165=965$. Т. е. для полученія числа сотенъ, показывающаго задуманное число, нужно отнять въ данномъ случаѣ 165; ($6\times4=24$; $24+9=33$; $33\times5=165$).

Можно также взять не 100, а всякое иное число и сдѣлать такъ, чтобы оно заключалось въ остаткѣ отъ послѣдняго вычитанія столько разъ, сколько единицъ заключается въ задуманномъ числѣ. Такъ, напр., возьмемъ число 24, которое можно представить состоящимъ изъ множителей 2, 3, 4, ($2\times3\times4=24$), а числа, которыя будемъ прибавлять, пусть будутъ 7 и 8.

Пусть задуманное число есть 5. Удваивая его, находимъ 10, прибавляя 7, находимъ $10+7=17$; утроивая, находимъ $(10+7)\times3=30+21=51$; придавая 8, находимъ $30+29=59$; беря послѣднее число 4 раза, получимъ $120+116=236$. Отнимаемъ отсюда 116, остается 120, въ которомъ 24 содержится 5 разъ, т. е. получается задуманное число 5.

Можно также вмѣсто трехъ множителей брать только два, а вмѣсто двухъ чиселъ прибавлять только одно, и тогда **число десятковъ** числа, полученнаго послѣ вычисленія, подобнаго предыдущему, покажетъ задуманное число.

Можно также брать четыре, пять, шесть и т. д. множителей, прибавлять соотвѣтственное (три, четыре и т. д.) количество чиселъ, затѣмъ, поступая, какъ указано выше, угадывать задуманное кѣмъ-либо число.

Можно, наконецъ, вмѣсто того, чтобы прибавлять числа, вычитать ихъ, а въ концѣ вмѣсто вычитанія прибавлять извѣстное число. Такъ, напр., воспользуемся числами перваго примѣра настоящей задачи, и пусть задуманное число будетъ 12. Удвоивъ его, получимъ 24; вычитая отсюда 5, получимъ $24-5$; умножая на 5, получимъ $120-25$; вычитая 10, получаемъ $120-35$; умножая на 10, получимъ $1200-350$. Здѣсь вмѣсто того, чтобы вычесть, нужно прибавить 350: сумма получится 1200, и число сотенъ въ ней (12) даетъ задуманное число.

Словомъ, читатель можетъ видоизмѣнять и разнообразить эту задачу, какъ ему угодно.

Задача 112-я.

Угадать задуманное число инымъ путемъ.

Изложимъ теперь способъ, который съ виду кажется замысловатѣе другихъ, хотя доказывается очень легко.

Пусть кто-либо задумаетъ какое-нибудь число. Затѣмъ предложите ему умножить это число на какое угодно заданное вами другое число, полученное произведеніе раздѣлить на какое угодно заданное вами число, затѣмъ частное опять умножить на какое вамъ угодно число, это произведеніе опять раздѣлить на какое

угодно заданное вами число и т. д. Если угодно, то можно предоставить тому, кто задумалъ число, самому умножать и дѣлить задуманное число на какія ему угодно числа, лишь бы онъ сообщалъ каждый разъ, на какое число онъ множитъ и на какое дѣлитъ. Но, чтобы угадать задуманное число, самъ угадывающій пусть въ то же время возьметъ какое-либо число и продѣлываетъ надъ нимъ всѣ тѣ же самыя умноженія и дѣленія, что и задумавшій число. Остановившись затѣмъ на какомъ-либо дѣленіи, попросите задумавшаго число, чтобы онъ раздѣлилъ на задуманное имъ число то послѣднее число, которое онъ получилъ. Точно также и вы (угадывающій) раздѣлите послѣднее вами полученное число на взятое вами первоначально. **Тогда у васъ получится тоже число, что и у задумавшаго число.** Послѣ этого пусть задумавшій число прибавитъ къ полученному имъ въ умѣ частному задуманное число и скажетъ вамъ результатъ. Вычитая изъ этого результата извѣстное уже вамъ частное, получаете задуманное число.

Напримѣръ: Пусть кто либо задумаетъ число 5. Предложите ему помножить его на 4; результатъ (20) раздѣлить на 2 (получится 10); полученное число умножить на 6 (получится 60); это послѣднее произведеніе раздѣлить на 4 (получится 15). Но въ то же время вы сами должны выбрать какое-либо число и дѣлать надъ нимъ всѣ тѣ же дѣйствія. Пусть, напр., вы возьмете 4 (лучше, вообще, брать для удобства 1). Умножая на 4, вы получаете 16; дѣля на 2, вы получаете 8; умножая на 6, вы получаете 48; дѣля это число на 4, вы получаете 12. Вслѣдъ затѣмъ вы говорите задумавшему число, чтобы онъ послѣднее полученное имъ число (т. е. 15) раздѣлилъ на задуманное (т. е. 5). У него получается 3.

Если вы въ то же время свое послѣднее полученное число 12 раздѣлите на взятое вами сначала, т. е. 4, то получите также 3. Сдѣлавъ видъ, что вамъ неизвѣстно полученное вашимъ партнеромъ частное, вы говорите ему, чтобы онъ прибавилъ къ полученному имъ числу задуманное число и сказалъ вамъ результатъ; онъ, конечно, скажетъ вамъ въ этомъ примѣрѣ 8. Отнимая отъ 8 полученное уже вами частное 3, найдете задуманное вашимъ партнеромъ число 5.

Доказательство.

Если надъ какимъ-либо числомъ n производится рядъ умноженій и дѣленій, то получается результатъ вида $n \cdot \frac{a \cdot b \cdot c \ldots .}{g \cdot h \; k \ldots .}$. Если произвести тѣ же дѣйствія надъ числомъ p, то получится результатъ вида $p \cdot \frac{a \cdot b \cdot c \ldots .}{g \cdot h \cdot k \ldots .}$. Оба эти результата, раздѣленные первый на n, а второй на p, дадутъ, очевидно, одно и то же число $\frac{a \cdot b \cdot c \ldots .}{g \cdot h \cdot k \ldots .}$. Итакъ, зная число $\frac{a \cdot b \cdot c \ldots .}{g \cdot h \cdot k \ldots .}$ и сумму $\frac{a \cdot b \cdot c \ldots .}{g \cdot h \cdot k \ldots .} + n$, достаточно изъ послѣдняго вычесть первое, чтобы получить число n.

Замѣчаніе. Можно, очевидно, всячески видоизмѣнять настоящую задачу, такъ какъ, во-первыхъ, можно дѣлить и умножать на какія угодно числа, а во-вторыхъ, вмѣсто того, чтобы умножать и дѣлить поочередно, можно сначала умножать два, три и т. д. раза сряду, а затѣмъ столько же разъ дѣлить, или наоборотъ. Можно также, зная послѣднее частное, замѣнять сложеніе вычитаніемъ, если задуманное число окажется меньше полученнаго послѣдняго частнаго, и т. д.

Задача 113-я.

Угадать нѣсколько задуманныхъ кѣмъ-либо чиселъ.

I. Пусть кто-либо задумаетъ **нечетное** число какихъ-либо чиселъ, т. е. 3, или 5, или 7, или 9 и т. д. чиселъ, и пусть онъ скажетъ вамъ сумму перваго и второго чиселъ, затѣмъ суммы второго и третьяго, третьяго и четвертаго и т. д., наконецъ, сумму послѣдняго изъ задуманныхъ имъ чиселъ и перваго.

Возьмите эти суммы въ **томъ же порядкѣ**, какъ онѣ сказаны вамъ, и сложите вмѣстѣ всѣ тѣ, которыя стоятъ на нечетныхъ мѣстахъ (т. е. 1-ю съ 3-ей, съ 5-й и т. д.), а затѣмъ сложите всѣ тѣ, которыя стоятъ на четныхъ мѣстахъ (т. е. 2-ю съ 4-ой, съ 6-й и т. д.), и вычтите изъ перваго результата второй. Оста-

токъ и дастъ **удвоенное первое задуманное число.** Беря половину этого остатка, получаемъ самое число. Зная его, не трудно найти остальныя числа, такъ какъ суммы перваго и второго, второго и третьяго и т. д. извѣстны.

Доказательство.

Пусть задуманныя числа будутъ a, b, c, d, e. Даны суммы:

$$a+b;\ b+c;\ c+d;\ d+e;\ e+a.$$

Складывая суммы, стоящія на нечетныхъ мѣстахъ, получимъ:

$$a+b+c+d+e+a,$$

и складывая суммы, стоящія на четныхъ мѣстахъ, получимъ:

$$b+c+d+e.$$

Вычитая изъ первой суммы вторую, получаемъ $2a$. Половина этого числа есть первое изъ задуманныхъ чиселъ a; вычитая a изъ $a+b$, получимъ b и т. д.

Другой случай.

II. Если же кто-либо задумаетъ **четное** число чиселъ, то, какъ и выше, пусть онъ скажетъ суммы задуманныхъ чиселъ по два (перваго со вторымъ, второго съ третьимъ и т. д.), но въ концѣ пусть объявитъ сумму не послѣдняго съ первымъ задуманнымъ числомъ, но **послѣдняго со вторымъ.** Послѣ этого опять нужно сложить всѣ суммы, стоящія на нечетныхъ мѣстахъ, **кромѣ первой,** затѣмъ всѣ суммы, стоящія на четныхъ мѣстахъ, и изъ второго результата вычесть первый. Остатокъ и дастъ **удвоенное второе задуманное число.**

Доказательство.

Пусть задуманы числа a, b, c, d, e, f.
Даны суммы:

$$a+b;\ b+c;\ c+d;\ d+e;\ e+f;\ f+b.$$

Суммы, стоящія на нечетныхъ мѣстахъ, за исключеніемъ первой, даютъ:

$$c+d+e+f.$$

Суммы, стоящія на четныхъ мѣстахъ, даютъ:

$$b+c+d+e+f+b.$$

Разность между этой суммой и предыдущей есть $2b$; половина этого числа и есть задуманное второе число b. Остальныя числа найти уже легко.

Замѣчанія. Можно эту же задачу рѣшать иными способами, изъ которыхъ укажемъ на слѣдующіе:

Пусть число задуманныхъ чиселъ будетъ **нечетное**.

Сложивъ всѣ данныя суммы и раздѣливъ полученное число пополамъ, найдемъ сумму всѣхъ задуманныхъ чиселъ. Если же задумано **четное** число чесель, то сложимъ всѣ данныя суммы, кромѣ первой, результатъ подѣлимъ пополамъ и получимъ сумму всѣхъ задуманныхъ чиселъ, кромѣ перваго. Но, зная сумму всѣхъ задуманныхъ чиселъ, легко найти въ данномъ случаѣ каждое число въ отдѣльности. Пусть, напримѣръ, задуманы числа 2, 3, 4, 5, 6. Суммы, которыя даются, будутъ: 5, 7, 9, 11, 8. Складывая эти числа, получимъ 40. Половина этого числа (20) и есть сумма всѣхъ задуманныхъ чиселъ.

Зная теперь, что сумма 2-го и 3-го задуманныхъ чиселъ есть 7, а сумма 4-го и 5-го чиселъ есть 11, вычитаемъ $7+11=18$ изъ 20 и получаемъ первое задуманное число 2 и т. д.

Подобнымъ же образомъ надо поступать и въ томъ случаѣ, когда задумано четное число чиселъ.

Можно узнавать числа и такъ. Если кто-либо задумаетъ 3 числа, предложите ему сказать ихъ суммы по 2, какъ объяснено выше; если онъ задумалъ 4 числа, предложите ему сложить ихъ по три и сказать вамъ суммы; если задумано 5 чиселъ, предложите сложить ихъ по четыре и сказать вамъ суммы и т. д. Затѣмъ, чтобы отгадать задуманныя числа, нужно руководствоваться слѣдующимъ общимъ правиломъ.

Всѣ извѣстныя суммы сложить и полученный результатъ раздѣлить на число, единицей меньшее числа задуманныхъ чи-

селъ. Полученное частное и есть сумма всѣхъ задуманныхъ чиселъ. Послѣ этого уже не трудно найти каждое число въ отдѣльности. Пусть, напримѣръ, задуманы 3, 5, 6, 8. Суммы ихъ по три будутъ $3+5+6=14$, $5+6+8=19$, $6+8+$ $+3=17$, $8+3+5=16$. Складывая эти суммы, получаемъ *66*. Эту сумму надо раздѣлить на 3 (т. е. на число, меньшее единицей числа задуманныхъ чиселъ). Получается 22, сумма всѣхъ задуманныхъ чиселъ. Если, теперь, изъ 22 вычесть 14, получимъ послѣднее изъ задуманныхъ чиселъ (8); вычитая 19, получаемъ первое (3) и т. д. Понять и доказать все это не трудно.

Желающимъ предоставляемъ доказать, почему въ случаѣ четнаго числа задуманныхъ чиселъ нельзя брать попарно суммъ такъ, чтобы послѣдняя состояла изъ послѣдняго задуманнаго числа плюсъ первое, а непремѣнно послѣднее и второе изъ задуманныхъ чиселъ.

Задача 114-я.

Угадать задуманное число, ничего не спрашивая у задумывающаго.

Предложите кому-либо задумать число, затѣмъ пусть онъ умножитъ задуманное число на произвольно выбранное вами число, къ этому числу пусть онъ прибавитъ любое данное вами число и полученную сумму раздѣлитъ на данное вами же произвольное число. Въ то же время данный вами множитель раздѣлите въ умѣ на данный дѣлитель, и сколько единицъ и частей единицы заключается въ полученномъ частномъ, столько разъ предложите задумавшему число отнять отъ полученнаго имъ частнаго задуманное число, и вы тотчасъ же скажете ему остатокъ, который онъ получилъ. Этотъ остатокъ всегда равенъ частному, полученному отъ дѣленія того числа, которое вы дали, чтобы приложить къ произведенію, на данный вами же дѣлитель.

Напримѣръ: Пусть кто-либо задумаетъ 6; предложите ему умножить его на 4. Получится 24; предложите прибавить 15; получится 39. Пусть раздѣлитъ на 3; получится 13. Дѣля въ умѣ въ то же время 4 на 3, вы получаете $^4/_3$ или $1^1/_3$. Поэтому предложите задумавшему число отнять отъ полученнаго

имъ частнаго задуманное число да еще одну треть этого числа (т. е. шесть да еще два,—всего восемь): $13-8=5$, —остается 5. Тотъ же результатъ получится, если вы данное вами число 15 раздѣлите на данный вами же дѣлитель 3.

Доказательство.

Дѣйствія, которыя производятся въ данномъ случаѣ надъ задуманнымъ числомъ n, можно выразить такъ:

$\frac{na+b}{c}$, а это выраженіе можно представить въ видѣ $\frac{na}{c}+\frac{b}{c}$.

Ясно, что вычитая $n.\frac{a}{c}$, получимъ остатокъ $\frac{b}{c}$.

Замѣчаніе. Настоящая задача рѣшена здѣсь въ довольно общемъ видѣ. Употребляется иными часто такой частный случай ея. Заставляютъ удваивать задуманное число, затѣмъ прибавлять къ результату произвольное, но **четное** число, затѣмъ заставляютъ полученную сумму дѣлить на 2 и изъ частнаго вычитать одинъ разъ задуманное число. Остатокъ, конечно, всегда получится равнымъ половинѣ прибавленнаго раньше четнаго числа. Очевидно, однако, что интереснѣе рѣшать задачу въ общемъ видѣ. Тѣмъ болѣе, что при этомъ можно практиковаться въ дробяхъ. Если же почему-либо нежелательно получать дроби, то всегда возможно подобрать такія числа, чтобы дробей не получалось.

Задача 115-я.

Дано 2 числа,—одно четное, другое нечетное,—и предложено 2 лицамъ взять одному четное число, а другому нечетное, какъ кто пожелаетъ. Угадать, кто выбралъ четное, а кто нечетное?

Вы предлагаете, напр., Петру и Ивану два числа (одно четное и другое нечетное), напр. 10 и 9. Изъ нихъ одинъ, уже безъ вашего вѣдома, беретъ четное, а другой нечетное число. Чтобы угадать, какое кто взялъ число, вы тоже возьмите два числа, четное и нечетное, напр. 2 и 3, и предложите, чтобы

Петръ взятое имъ число помножитъ про себя на 2, а Иванъ свое число на 3, послѣ чего пусть они сложатъ полученныя ими числа и скажутъ намъ полученную сумму. Или же пусть скажутъ только, **четное** или **нечетное** число они получили послѣ сложенія, такъ какъ вамъ нужно знать только это. Если же хотите задачу сдѣлать болѣе непонятной, то вывѣдайте это у нихъ другимъ путемъ (Предлагая, напр., раздѣлить полученную ими сумму на два и сказать, дѣлится или не дѣлится она нацѣло и т. д.). Положимъ, вы узнали, что получилась четная сумма; тогда ясно, что число, помноженное на 3, было четное, т. е. Иванъ взялъ четное число 10, а Петръ нечетное 9. Если же по сложеніи у нихъ получилась нечетная сумма, то ясно, что тотъ взялъ нечетное число, кому вы предложили умножить его число на 3.

Доказательство.

Число, которое умножается на 2, даетъ всегда произведеніе **четное**. Слѣдовательно, сумма, обоихъ произведеній четна или нечетна, смотря по тому, будетъ ли **четно** или **нечетно** другое произведеніе. Но если число множится на нечетный множитель, то произведеніе будетъ четнымъ, если множимое четно, и нечетнымъ, если нечетно множимое. Итакъ, по суммѣ обоихъ произведеній можно судить, четно или нечетно то число, которое множится на нечетный множитель.

Задача 116-я.

Та же задача съ двумя взаимно-простыми числами.

Предложите 2-мъ лицамъ замѣтить любое изъ данныхъ 2-хъ чиселъ, но такихъ, чтобы эти числа были между собой **взаимно-простыя**, какъ, напр., 9 и 7, и кромѣ того, чтобы одно изъ нихъ было составное (какъ въ данномъ примѣрѣ 9). Множителями, на которые вы хотите, чтобы помножили замѣченныя числа, возьмите также два взаимно-простыхъ числа, но такихъ, чтобы одно изъ нихъ содержалось цѣлое число разъ въ одномъ изъ чиселъ, данныхъ на выборъ двумъ лицамъ. Напр., если взять 3 и 2, то эти числа и взаимно-простыя, и 3 есть множитель 9.

Вслѣдъ затѣмъ предложите одному лицу умножить выбранное имъ число на 2, а другому на 3, сложить результаты и сказать вамъ или полученную сумму, или же, дѣлится ли эта сумма нацѣло на тотъ данный вами множитель, который въ свою очередь содержится въ одномъ изъ предложенныхъ вами на выборъ чиселъ (Напр. во взятомъ нами примѣрѣ узнать, дѣлится ли число на 3). Узнавъ это, тотчасъ же можно опредѣлить, кто какое число замѣтилъ. Въ самомъ дѣлѣ, если полученная сумма дѣлится на три, это значитъ, что на 3 умножено число, не дѣлящееся на 3, т. е. 7; наоборотъ, если полученная сумма не дѣлится на 3, то это значитъ, что на три было умножено число, дѣлящееся на 3, т. е. 9. Точно также поступаютъ и въ тѣхъ случаяхъ, когда берутся и предлагаются иныя числа, лишь бы они удовлетворяли изложеннымъ выше условіямъ.

Доказательство.

Пусть A и B суть взаимно-простыя числа, и два другихъ a и c тоже взаимно-простыя числа, при чемъ A есть кратное числа a. Послѣ соотвѣтственныхъ умноженій можетъ получиться сумма

$$Ac + Ba \text{ или } Aa + Bc.$$

И ясно, что первая сумма дѣлима на a, вторая же—нѣтъ. Слѣдовательно, B умножится или не умножится на a, смотря по тому, дѣлима или недѣлима на a сумма, полученная задумавшими послѣ соотвѣтственныхъ умноженій и сложенія.

Задача 117-я.

Отгадать нѣсколько задуманныхъ чиселъ, если каждое изъ нихъ не превышаетъ десяти.

Попросите задумавшаго умножить **первое** изъ задуманныхъ чиселъ на 2 и къ произведенію прибавить 5, полученную сумму умножить на 5 и къ результату прибавить 10. Къ полученному числу прибавить **второе** задуманное число и все помножить на 10; къ полученному результату прибавить **третье** за-

думанное число и опять помножить на 10; потомъ прибавить четвертое изъ задуманныхъ чиселъ и опять помножить на 10 и т. д. Словомъ, пусть задумавшій нѣсколько чиселъ, каждое изъ которыхъ не превышаетъ десяти, постоянно умножаетъ на 10 и прибавляетъ одно изъ задуманныхъ чиселъ, пока не прибавитъ послѣдняго. Вслѣдъ затѣмъ пусть задумавшій числа объявитъ послѣднюю полученную имъ сумму; и если задумано только 2 числа, то, вычтя изъ этой суммы 35, найдемъ, что число десятковъ остатка даетъ первое задуманное число, а число простыхъ единицъ даетъ второе задуманное число. Если же задумано три числа, то изъ сказанной вамъ суммы вычтите 350, и тогда число сотенъ дастъ первое задуманное число, число десятковъ—второе, число простыхъ единицъ—третье. Если задумано четыре числа, то изъ сказанной вамъ суммы вычтите 3 500, и тогда число тысячъ остатка дастъ первое задуманное число, число сотенъ—второе, число десятковъ третье, число простыхъ единицъ четвертое. Ясно, что въ случаѣ 5 задуманныхъ чиселъ нужно изъ сказаннаго вамъ результата вычитать 35 000 и т. д.

Напр., пусть задуманы 3, 5, 8, 2. Удваивая первое изъ нихъ, получаемъ 6; придавая 5, находимъ 11; умножая это число на 5, имѣемъ 55; придавая 10, получаемъ 65; прибавляя сюда второе задуманное число, получаемъ 70; умноженное на 10, оно даетъ 700; придавая сюда третье задуманное число, получаемъ 708, умножая на 10, получаемъ 7 080; придавая сюда четвертое число, получаемъ 7 082. Если, теперь, изъ этого послѣдняго числа вычесть 3 500, то получится остатокъ 3 582, который и выражаетъ по порядку цифръ задуманныя числа: 3, 5, 8, 2.

Доказательство.

Пусть задуманныя числа будутъ a, b, c, d,... Надъ ними производятся слѣдующія дѣйствія:

Для первыхъ двухъ чиселъ:

$$(2a+5)\times 5=10a+25;\ 10a+25+10=10a+35;$$
$$10a+35+b=10a+b+35.$$

Для третьяго числа:

$$(10a + b + 35) \times 10 + c = 100a + 10b + c + 350.$$

Для четвертаго:

$$(100a + 10b + c + 350) \times 10 + d = 1000a + 100b + 10c + d + 3\,500.$$

И т. д. Откуда и ясно, что, вычитая изъ результата 35, 350, 3 500, смотря по количеству задуманныхъ чиселъ, мы получимъ всѣ задуманныя числа въ видѣ цифръ остатка, считая слѣва направо.

Замѣчанія. Данную задачу, изложенную въ довольно общемъ видѣ, можно, очевидно, видоизмѣнять и прилагать ко многимъ частнымъ случаямъ.

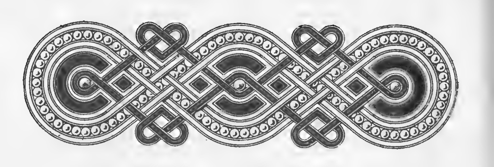
Такъ, напр., при игрѣ въ кости съ помощью этой задачи можно угадать, не смотря, число выброшенныхъ каждой костью очковъ. И это тѣмъ болѣе легко, что число очковъ каждой кости не превышаетъ 6-ти. Способъ угадыванія и правила остаются совершенно тѣ же.

Другіе пользуются этими же правилами для того, чтобы угадать, кто изъ нѣсколькихъ лицъ взялъ какую-либо вещь, въ какой рукѣ ее держитъ, на какомъ пальцѣ и даже на какомъ суставѣ.

Въ такомъ случаѣ необходимо расположить данныхъ лицъ въ извѣстномъ порядкѣ такъ, чтобы одинъ считался первымъ, другой—вторымъ, слѣдующій—третьимъ и т. д. Точно также нужно представить, что одна рука есть первая, а другая—вторая, и что на каждой рукѣ есть первый, второй, третій, четверый и пятый палецъ, и то же самое относительно суставовъ на каждомъ пальцѣ,—одинъ изъ нихъ пусть будетъ первымъ, другой вторымъ и т. д. Въ такомъ случаѣ задача сводится къ угадыванію четырехъ задуманныхъ чиселъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть изъ нѣсколькихъ лицъ тотъ, кого вы назвали **четвертымъ**, взялъ какую-либо вещь и держитъ ее въ **второй** рукѣ, на **пятомъ** пальцѣ, на **третьемъ** суставѣ. Въ такомъ случаѣ вы просите, чтобы взявшій вещь удвоилъ то число, которымъ онъ считается по порядку (У него получится 8). Прибавляя сюда 5, помножая результатъ на 5 и прибавляя 10, взявшій вещь получитъ нѣкоторое число (въ нашемъ примѣрѣ 75).

Къ этому числу предложите ему прибавить число руки и результатъ умножить на 10 (въ нашемъ примѣрѣ получится 770); къ этой суммѣ предложите прибавить число, выражающее палецъ руки, и опять умножить на 10 (Въ нашемъ примѣрѣ взявшій вещь получить 7 750). И, наконецъ, пусть прибавить къ этому послѣднему числу число, выражающее суставъ, и пусть кто-либо изъ играющихъ, не имѣющій вещи, скажетъ вамъ общую полученную сумму. Вамъ скажутъ въ данномъ примѣрѣ 7 753. Отнимая отсюда 3 500, вы получаете 4 253. Числа 4, 2, 5 и 3 показываютъ вамъ, что взятая вещь находится у **четвертаго** изъ играющихъ лицъ во **второй** рукѣ, на **пятомъ** пальцѣ и на **третьимъ** суставѣ.





Волшебные квадраты.

Основы теоріи.

Въ предыдущихъ главахъ мы уже не разъ встрѣчались съ волшебными квадратами и при помощи картъ, или домино, практически рѣшали задачи о составленіи ихъ. Войдемъ, въ заключеніе, въ область основныхъ теоретическихъ понятій о волшебныхъ квадратахъ, тѣмъ болѣе, что всякаго рода связанныя съ ними задачи и развлеченія весьма распространены.

Для знакомства съ теоретическими началами приводимъ здѣсь съ самыми небольшими сокращеніями нѣкоторыя статьи профессора В. П. Ермакова, а также статью г. Е. Орлова, которыя были напечатаны въ «Журналѣ Элементарной Математики» за 1884—5 годъ. Но, какъ уже упомянуто раньше, для болѣе полнаго и детальнаго изученія теоріи волшебныхъ квадратовъ необходимо обратиться къ спеціальнымъ сочиненіямъ, въ частности хотя бы къ указаннымъ на страницѣ 118-ой настоящей книги.

Теорія волшебныхъ квадратовъ, казалось бы, стоитъ особнякомъ въ ряду иныхъ отдѣловъ математики и имѣетъ мало «практическихъ» приложеній. Тѣмъ не менѣе пренебрегать ею не слѣдуетъ. Надъ ней работали такіе высочайшіе математическіе умы, какъ Ферма, и съ помощью ея не разъ приходили къ самымъ удивительнымъ и значительнымъ открытіямъ.

Полные волшебные квадраты.

Въ квадратѣ, состоящемъ изъ n^2 клѣтокъ, напишемъ всѣ числа отъ единицы до n^2. Если суммы чиселъ въ каждомъ горизонтальномъ ряду, въ каждомъ вертикальномъ ряду и въ каждой діагонали одинаковы, то такой квадратъ называется **волшебнымъ.**

Изъ каждаго волшебнаго квадрата поворачиваніемъ и переворачиваніемъ можно составить еще семь новыхъ волшебныхъ квадратовъ.

Если всѣ **восемь квадратовъ**, полученныхъ поворачиваніемъ и переворачиваніемъ **одного квадрата**, считать **за одно рѣшеніе**, то въ такомъ предположеніи **существуетъ только одинъ волшебный квадратъ, состоящій изъ девяти клѣтокъ.**

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Для квадратовъ, состоящихъ изъ большаго числа клѣтокъ, мы введемъ еще новое условіе. Если волшебный квадратъ, послѣ перенесенія одного или нѣсколькихъ горизонтальныхъ или вертикальныхъ рядовъ съ одной стороны на другую, не теряетъ своихъ свойствъ, т. е. остается также волшебнымъ, то такой квадратъ мы будемъ называть **полнымъ волшебнымъ квадратомъ.** Если мы въ первомъ изъ написанныхъ ниже волшебныхъ квадратовъ перенесемъ первый вертикальный рядъ съ лѣвой стороны на правую, мы получимъ второй волшебный квадратъ.

1	8	13	12
14	11	2	7
4	5	16	9
15	10	3	6

8	13	12	1
11	2	7	14
5	16	9	4
10	3	6	15

13	12	1	8
2	7	14	11
16	9	4	5
3	6	15	10

12	1	8	13
7	14	11	2
9	4	5	16
6	15	10	3

Перенося во второмъ квадратѣ первый вертикальный рядъ съ лѣвой стороны на правую, мы получимъ третій волшебный квадратъ. Дѣлая подобную операцію съ третьимъ квадратомъ, мы получимъ четвертый волшебный квадратъ. Всѣ эти четыре квадрата суть полные волшебные квадраты. Перенося въ каждомъ изъ нихъ вертикальные ряды съ одной стороны на другую, мы получимъ изъ каждаго квадрата еще три новыхъ полныхъ волшебныхъ квадрата.

Дадимъ еще другое опредѣленіе полнаго волшебнаго квадрата. Двѣ параллельныя діагонали, находящіяся съ различныхъ сторонъ главной діагонали, мы будемъ называть **дополнительными,** если число клѣтокъ въ обѣихъ діагоналяхъ равно числу клѣтокъ въ главной діагонали. Двѣ дополнительныя діагонали надлежащимъ перенесеніемъ горизонтальныхъ или вертикальныхъ рядовъ всегда могутъ быть преобразованы въ одну главную діагональ. **Полнымъ волшебнымъ квадратомъ называется такой квадратъ, въ которомъ сумма чиселъ въ каждомъ горизонтальномъ ряду, въ каждомъ вертикальномъ ряду, въ каждой главной діагонали и въ каждыхъ двухъ дополнительныхъ діагоналяхъ одна и та же.**

Всякій полный волшебный квадратъ перенесеніемъ горизонтальныхъ и вертикальныхъ рядовъ съ одной стороны на другую можетъ быть преобразованъ въ такой квадратъ, въ которомъ данное число находится въ данной клѣткѣ.

Волшебный квадратъ съ девятью клѣтками не можетъ быть полнымъ.

Покажемъ теперь, какимъ образомъ могутъ быть составлены всѣ полные волшебные квадраты съ 16 клѣтками. Возьмемъ четыре квадрата

		a	a
a	a		
		a	a
a	a		

	b	b	
b			b
	b	b	
b			b

	c		c
c		c	
c		c	
	c		c

	d		d
	d		d
d		d	
d		d	

Наложивъ ихъ одинъ на другой и сложивъ буквы въ каждой клѣткѣ, мы получимъ слѣдующій квадратъ:

	b + c + d	a + b	a + c + d
a + b + c	a + d	c	b + d
c + d	b	a+b+c+d	a
a + b + d	a + c	d	b + c

Если мы въ этомъ послѣднемъ квадратѣ вмѣсто a, b, c и d, поставимъ въ какомъ-нибудь порядкѣ 1, 2, 4 и 8, послѣ этого числа въ каждой клѣткѣ увеличимъ на единицу, то получимъ такой полный волшебный квадратъ, въ которомъ въ лѣвомъ верхнемъ углу стоитъ единица. Полагая, напр., $a=1$, $b=2$, $c=4$ и $d=8$, мы получимъ полный волшебный квадратъ, разсмотрѣнный нами раньше. Такъ какъ четыре буквы можно перемѣщать 24-мя различными способами, то нашимъ пріемомъ мы можемъ получить 24 такихъ полныхъ волшебныхъ квадрата, въ каждомъ изъ которыхъ въ лѣвомъ верхнемъ углу стоитъ единица. Изъ полученнаго такимъ образомъ каждаго квадрата перенесеніемъ горизонтальныхъ и вертикальныхъ рядовъ съ одной стороны на другую мы можемъ образовать еще 15 новыхъ квадратовъ. Всего, слѣдовательно, мы можемъ найти $16 \times 24 = 384$ полныхъ волшебныхъ квадрата съ 16-ю клѣтками.

Указанный нами пріемъ даетъ всѣ возможные полные волшебные квадраты съ 16-ю клѣтками; больше 384 такихъ квадратовъ быть не можетъ.

Покажемъ теперь способъ составленія полныхъ волшебныхъ квадратовъ съ 25 клѣтками. Наложивъ два квадрата:

a	b	c	d	e
d	e	a	b	c
b	c	d	e	a
e	a	b	c	d
c	d	e	a	b

a	**b**	**g**	**d**	**e**
g	**d**	**e**	**a**	**b**
e	**a**	**b**	**g**	**d**
b	**g**	**d**	**e**	**a**
d	**e**	**a**	**b**	**g**

одинъ на другой и сложивъ буквы въ каждой клѣткѣ, мы получимъ слѣдующій квадратъ:

a + **a**	b + **b**	c + **g**	d + **d**	e + **e**
d + **g**	e + **d**	a + **e**	b + **a**	c + **b**
b + **e**	c + **a**	d + **b**	e + **g**	a + **d**
e + **b**	a + **g**	b + **d**	c + **e**	d + **a**
c + **d**	d + **e**	e + **a**	a + **b**	b + **g**

Если мы въ этомъ послѣднемъ квадратѣ вмѣсто *a*, *b*, *c*, *d*, *e* подставимъ въ какомъ-нибудь порядкѣ 1, 2, 3, 4, 5 и вмѣсто **a**, **b**, **g**, **d**, **e** подставимъ тоже въ произвольномъ порядкѣ 0, 5, 10, 15, 20, то получимъ полный волшебный квадратъ. Такъ какъ число перемѣщеній изъ пяти буквъ равно 120, то указаннымъ способомъ мы можемъ образовать $120 \times 120 = 14\,400$ полныхъ волшебныхъ квадратовъ. Столько же полныхъ волшебныхъ квадратовъ мы можемъ образовать, подставляя, наоборотъ, 0, 5, 10, 15, 20 вмѣсто *a*, *b*, *c*, *d*, *e* и 1, 2, 3, 4, 5 вмѣсто **a**, **b**, **g**, **d**, **e**.

Полагая, напр., $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, $e=5$, $\mathfrak{a}=0$, $\mathfrak{b}=5$, $\mathfrak{g}=10$, $\mathfrak{d}=15$, $\mathfrak{e}=20$, мы получимъ слѣдующій квадратъ:

1	7	13	19	25
14	20	21	2	8
22	3	9	15	16
10	11	17	23	4
18	24	5	6	12

Указанный нами пріемъ даетъ всѣ возможные полные волшебные квадраты съ 25-ю клѣтками; больше 28 880 такихъ квадратовъ не можетъ быть.

Способъ составленія полныхъ волшебныхъ квадратовъ съ 25 клѣтками можетъ быть распространенъ на квадраты съ бо̀льшимъ числомъ клѣтокъ, если только это число не дѣлится ни на два, ни на три; но доказать, что такимъ способомъ получаются всѣ возможеые полные волшебные квадраты, дѣло весьма трудное.

Желающіе доказать приведенныя выше теоремы могутъ найти ихъ въ спеціальныхъ сочиненіяхъ, или же пусть докажутъ ихъ сами. Предлагаемъ также заняться составленіемъ полныхъ волшебныхъ квадратовъ съ 36 клѣтками. Для руководства замѣтимъ, что методъ составленія полныхъ волшебныхъ квадратовъ состоитъ главнымъ образомъ въ разложеніи такихъ квадратовъ на простѣйшіе квадраты. Для рѣшенія задачи **необходимо знакомство съ свойствами корней двухчленнаго уравненія, такъ какъ составленіе волшебныхъ квадратовъ находится въ тѣсной связи съ разложеніемъ на множители двучлена:**

$$x^{n^2}-1.$$

Такъ, теперь мы имѣемъ:

$$\frac{x^{16}-1}{x-1}=(x+1)\ (x^2+1)\ (x^4+1)\ (x^8+1).$$

Такъ какъ во второй части четыре множителя, то эта формула показываетъ, что каждый волшебный квадратъ съ 16 клѣтками можетъ быть разложенъ на четыре простѣйшихъ квадрата.

Среднiе волшебные квадраты съ шестнадцатью клѣтками.

Возьмемъ волшебный квадратъ съ четнымъ числомъ клѣтокъ и раздѣлимъ его горизонтальной или вертикальной линiей пополамъ. Если послѣ перестановки одной половины на мѣсто другой квадратъ не измѣняетъ своихъ свойствъ, т. е. остается также волшебнымъ, то такой квадратъ мы будемъ называть *среднимъ волшебнымъ квадратомъ*.

Складывая два квадрата:

a	c	d	b
d	b	a	c
b	d	c	a
c	a	b	d

a	d	c	b
b	c	d	a
d	a	b	c
c	b	a	d

мы получимъ общее выраженiе для средняго волшебнаго квадрата съ шестнадцатью клѣтками:

a + a	c + d	d + c	b + b
d + b	b + c	a + d	c + a
b + d	d + a	c + b	a + c
c + c	a + b	b + a	d + d

Числа, стоящія въ клѣткахъ этого квадрата, суть не что иное, какъ показатели при различныхъ членахъ произведенія, полученнаго отъ умноженія двухъ четырехчленовъ:

$$P = x^a + x^b + x^c + x^d,$$
$$Q = x^{\mathbf{a}} + x^{\mathbf{b}} + x^{\mathbf{c}} + x^{\mathbf{d}}.$$

Намъ извѣстно также, что въ клѣткахъ волшебнаго квадрата должны стоять всѣ числа отъ единицы до шестнадцати; поэтому

$$PQ = \frac{x^{17} - x}{x - 1}.$$

Остается подобрать восемь чиселъ a, b, c, d, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ такимъ образомъ, чтобы послѣднее уравненіе обратилось въ тождество. Вторая часть уравненія разбивается на произведеніе четырехъ двучленовъ, ибо

$$\frac{x^{16} - 1}{x - 1} = (1 + x)\ (1 + x^2)\ (1 + x^4)\ (1 + x^8).$$

Отсюда слѣдуетъ, что нашему уравненію можно удовлетворить шестью различными способами:

1) $P + x\ (1 + x\ )\ (1 + x^2),\ Q + (1 + x^4)\ (1 + x^8)$
2) $P + x\ (1 + x\ )\ (1 + x^4),\ Q + (1 + x^2)\ (1 + x^8)$
3) $P + x\ (1 + x\ )\ (1 + x^8),\ Q + (1 + x^2)\ (1 + x^4)$
4) $P + x\ (1 + x^2)\ (1 + x^4),\ Q + (1 + x\ )\ (1 + x^8)$
5) $P + x\ (1 + x^2)\ (1 + x^8),\ Q + (1 + x\ )\ (1 + x^4)$
6) $P + x\ (1 + x^4)\ (1 + x^8),\ Q + (1 + x\ )\ (1 + x^2)$

Сравнивъ показатели различныхъ членовъ въ обѣихъ частяхъ, мы замѣтимъ, что вмѣсто a, b, c, d, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ могутъ быть подставлены числа, указанныя въ слѣдующей таблицѣ:

a,	b,	c,	d	a,	b,	c,	d
1.	2,	3,	4	0,	4,	8,	12
1,	2,	5,	6	0,	2,	8,	10
1,	2,	9,	10	0,	2,	4,	6
1,	3,	5,	7	0,	1,	8,	9
1,	3,	9,	11	0,	1,	4,	5
1,	5,	9,	13	0,	1.	2,	3

По этой таблицѣ вмѣсто буквъ могутъ быть поставлены числа, стоящія въ какомъ нибудь изъ шести рядовъ. Вмѣсто a, b, c, d могутъ быть поставлены въ произвольномъ порядкѣ числа, стоящія въ какомъ-нибудь ряду съ лѣвой стороны таблицы; вмѣсто **a**, **b**, **c**, **d** могутъ быть поставлены также въ произвольномъ порядкѣ числа, стоящія въ томъ же ряду съ правой стороны таблицы. Для примѣра, полагая

$$a=1,\ b=10,\ c=2,\ d=9,$$
$$\mathbf{a}=2,\ \mathbf{b}=\ 4,\ \mathbf{c}=6,\ \mathbf{d}=0,$$

мы составимъ слѣдующій волшебный квадратъ:

3	2	15	14
13	16	1	4
10	11	6	7
8	5	12	9

Такъ какъ четыре цифры мы можемъ перемѣщать 24-мя способами, то число всѣхъ волшебныхъ среднихъ квадратовъ равно $6 \times 24 \times 24 = 3\,456$. Если же мы условимся считать за одно рѣшеніе всѣ восемь квадратовъ, полученныхъ поворачиваніемъ и переворачиваніемъ одного квадрата, то число различныхъ среднихъ волшебныхъ квадратовъ будетъ равно $3\,456 : 8 = 432$. Въ этомъ числѣ заключаются также и полные волшебные квадраты, такъ какъ послѣдніе представляютъ только частный случай среднихъ квадратовъ.

Указанный пріемъ даетъ всѣ возможные средніе волшебные квадраты съ шестнадцатью клѣтками; болѣе 3 456 такихъ квадратовъ пе можетъ быть.

Правильные волшебные квадраты съ 16-ю клѣтками.

Каждый волшебный квадратъ можетъ быть разложенъ на сумму нѣсколькихъ квадратовъ. Возьмемъ волшебный квадратъ съ 16-ю клѣтками; въ немъ написаны всѣ числа отъ 1 до 16. Уменьшивъ каждое изъ чиселъ на 1, мы получимъ волшебный квадратъ, въ клѣткахъ котораго будутъ всѣ числа отъ 0 до 15. Каждое число отъ 1 до 15 можетъ быть составлено сложеніемъ четырехъ чиселъ: 1, 2, 4, 8 (См. выше, главу о двоичномъ исчисленіи).

$1 = 1$	$6 = 2 + 4$	$11 = 1 + 2 + 8$
$2 = 2$	$7 = 1 + 2 + 4$	$12 = 4 + 8$
$3 = 1 + 2$	$8 = 8$	$13 = 1 + 4 + 8$
$4 = 4$	$9 = 1 + 8$	$14 = 2 + 4 + 8$
$5 = 1 + 4$	$10 = 2 + 8$	$15 = 1 + 2 + 4 + 8.$

Разложивъ такимъ образомъ каждое число на составныя части и выдѣливъ въ одинъ квадратъ единицы, въ другой—двойки, въ третій—четверки и въ четвертый—восьмерки, мы разложимъ каждый волшебный квадратъ съ 16-ю клѣтками на сумму четырехъ квадратовъ. Такъ, напр., квадратъ

9	14	2	5
15	4	8	3
0	11	7	12
6	1	13	10

разлагается на сумму четырехъ:

1			1
1			1
	1	1	
	1	1	

	2	2	
2			2
	2	2	
2			2

	4		4
4	4		
		4	4
4		4	

8	8		
8		8	
	8		8
		8	8

Волшебный квадратъ

0	4	15	11
9	13	2	6
14	10	5	1
7	3	8	12

разлагается на сумму четырехъ квадратовъ:

		1	1
1	1		
		1	1
1	1		

		2	2
		2	2
2	2		
2	2		

	4	4	
	4		4
4		4	
4			4

		8	8
8	8		
8	8		
		8	8

Волшебный квадратъ съ шестнадцатью клѣтками мы будемъ называть правильнымъ, если каждый изъ его четырехъ составныхъ квадратовъ есть также волшебный квадратъ.

Простѣйшихъ волшебныхъ квадратовъ, въ клѣткахъ которыхъ стоятъ только два различныхъ числа, можетъ быть восемь. Прежде всего, мы имѣемъ четыре полныхъ простѣйшихъ квадрата:

a	a	a′	a′
a′	a′	a	a
a	a	a′	a′
a′	a′	a	a

b	b′	b	b′
b	b′	b	b′
b′	b	b′	b
b′	b	b′	b

c	c′	c	c′
c′	c	c′	c
c′	c	c′	c
c	c′	c	c′

d	d′	d′	d
d′	d	d	d′
d	d′	d′	d
d′	d	d	d′

Далѣе, имѣемъ два среднихъ квадрата:

e	e	e′	e′
e′	e′	e	e
e′	e′	e	e
e	e	e′	e′

f	f′	f′	f
f	f′	f′	f
f′	f	f	f′
f′	f	f	f′

Кромѣ того, есть еще два простѣйшихъ волшебныхъ квадрата:

g	g	g′	g′
g	g′	g	g′
g′	g	g′	g
g′	g′	g	g

h	h′	h	h′
h′	h′	h	h
h	h	h′	h′
h′	h	h′	h

Складывая восемь простѣйшихъ квадратовъ по четыре, мы можемъ получить всѣ возможные правильные волшебные квадраты съ шестнадцатью клѣтками. Впрочемъ, мы должны выбирать только такія сочетанія по четыре, чтобы числа въ клѣткахъ полученнаго квадрата были различны между собою; этому условію удовлетворяютъ только одиннадцать сочетаній.

Условимся обозначать наши простѣйшіе квадраты соотвѣтственно буквами: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*. Прежде всего,

мы получаемъ полный волшебный квадратъ сложеніемъ четырехъ простѣйшихъ полныхъ квадратовъ:

$$A+B+C+D.$$

Далѣе мы имѣемъ восемь слѣдующихъ среднихъ квадратовъ:

$$A+B+C+E,$$
$$A+B+D+F,$$
$$A+B+E+F,$$
$$A+C+D+E,$$
$$A+D+E+F,$$
$$B+C+D+F,$$
$$B+C+E+F,$$
$$C+D+E+F.$$

Кромѣ того, мы имѣемъ еще два правильныхъ волшебныхъ квадрата:

$$C+E+G+H,$$
$$D+F+G+H.$$

Въ каждомъ изъ найденныхъ одиннадцати квадратовъ, вмѣсто паръ буквъ a и a', b и b', c и c' и т. д., нужно подставить въ какомъ-нибудь порядкѣ четыре пары цифръ: 0 и 1, 0 и 2, 0 и 4, 0 и 8. Для примѣра возьмемъ квадратъ

$$C+E+G+H$$

и положимъ въ немъ

$$c=0,\ e=4,\ g=8,\ h=0.$$
$$c'=2,\ e'=0,\ g'=0,\ h'=1.$$

Такимъ образомъ, мы составимъ слѣдующій волшебный квадратъ:

12	15	0	3
11	1	14	4
2	8	7	13
5	6	9	10

Такъ какъ четыре пары цифръ можно перемѣщать 24-мя способами, а цифры каждой пары—двумя способами, то число

всѣхъ правильныхъ волшебныхъ квадратовъ равно $11 \times 16 \times 24 = 4\,224$. Если же мы условимся считать за одно рѣшеніе восемь квадратовъ, полученныхъ поворачиваніемъ и переворачиваніемъ одного квадрата, то число различныхъ правильныхъ волшебныхъ квадратовъ будетъ равно $4\,224 : 8 = 528$.

Изъ нашей теоріи слѣдуетъ, что къ числу правильныхъ квадратовъ принадлежатъ также разсмотрѣнные нами раньше полные и средніе квадраты.

Кромѣ правильныхъ квадратовъ есть еще много неправильныхъ волшебныхъ квадратовъ. Второй квадратъ, приведенный въ началѣ этой главы, представляетъ собою примѣръ неправильнаго волшебнаго квадрата.

Общее выраженіе всякаго неправильнаго квадрата получается сложеніемъ двухъ квадратовъ:

a	c	d	b
d	b	a	c
b	d	c	a
c	a	b	d

	$a+b$	$a-b$	
$c-d$	$-a\ \ c$	$a-c$	$c+d$
$-c+d$	$-a+c$	$a+c$	$-c+d$
	$a\ \ b$	$-a+b$	

Такимъ образомъ, вопросъ о составленіи неправильныхъ волшебныхъ квадратовъ приводится къ опредѣленію восьми чиселъ: a, b, c, d, a, b, c и d такимъ образомъ, чтобы въ клѣткахъ полученнаго квадрата стояли всѣ цѣлыя числа отъ единицы до шестнадцати. Мы не знаемъ простого рѣшенія этого вопроса и предоставляемъ читателямъ найти таковое.

Полные и средніе волшебные квадраты съ 64-мя клѣтками.

Въ настоящей главѣ предлагаемъ вниманію читателей изслѣдованіе г. Е. Орлова о полныхъ среднихъ квадратахъ съ 64-мя клѣтками.

Для квадрата въ 64 клѣтки имѣемъ:

$$\frac{x^{64}-1}{x-1}=(x^{32}+1)\ (x^{16}+1)\ (x^{8}+1)\ (x^{4}+1)\ (x^{2}+1)\ (x+1),$$

т. е. получаемъ 6 множителей, показывающихъ число элементарныхъ квадратовъ, составляющихъ общій квадратъ. И дѣйствительно, если мы возьмемъ 6 квадратовъ:

	a	a		a			a
a			a		a	a	
a			a		a	a	
	a	a		a			a
	a	a		a			a
a			a		a	a	
a			a		a	a	
	a	a		a			a

				b	b	b	b
b	b	b	b				
				b	b	b	b
b	b	b	b				
				b	b	b	b
b	b	b	b				
				b	b	b	b
b	b	b	b				

		c	c			c	c
		c	c			c	c
		c	c			c	c
		c	c			c	c
c	c			c	c		
c	c			c	c		
c	c			c	c		
c	c			c	c		

	d	d			d	d	
d			d	d			d
d			d	d			d
	d	d			d	d	
d			d	d			d
	d	d			d	d	
	d	d			d	d	
d			d	d			d

	e		e		e		e
	e		e		e		e
	e		e		e		e
	e		e		e		e
e		e		e		e	
e		e		e		e	
e		e		e		e	
e		e		e		e	

				f	f	f	f
				f	f	f	f
f	f	f	f				
f	f	f	f				
				f	f	f	f
				f	f	f	f
f	f	f	f				
f	f	f	f				

изъ которыхъ 3 послѣднiе, занятые буквами d, e и f, получаются переворачиванiемъ трехъ первыхъ около дiагонали, соединяющей лѣвый верхнiй съ правымъ нижнимъ угломъ, и совмѣстимъ ихъ въ одинъ общiй квадратъ, въ которомъ сложены элементы совпадающихъ клѣтокъ, то получимъ такой квадратъ:

A...

	$a+d+e$	$a+c+d$	$c+e$	$a+b+f$	$b+d+c+f$	$b+c+d+f$	$a+b+c+e+f$
$a+b+d$	$b+e$	$b+c$	$a+b+c+d+e$	$d+f$	$a+e+f$	$a+c+f$	$c+d+e+f$
$a+d+f$	$e+f$	$c+f$	$a+c+d+e+f$	$b+d$	$a+b+e$	$a+b+c$	$b+c+d+e$
$b+f$	$a+b+d+e+f$	$a+b+c+d+f$	$b+c+e+f$	a	$d+e$	$c+d$	$a+c+e$
$c+d+e$	$a+c$	$a+e$	d	$a+b+c+d+e+f$	$b+c+f$	$b+e+f$	$a+b+d+f$
$a+b+c+e$	$b+c+d$	$b+d+e$	$a+b$	$c+e+f$	$a+c+d+f$	$a+d+e+f$	f
$a+c+e+f$	$c+d+f$	$d+e+f$	$a+f$	$b+c+e$	$a+b+c+d$	$a+b+d+e$	b
$b+c+d+e+f$	$a+b+c+f$	$a+b+e+f$	$b+d+f$	$a+c+d+e$	c	e	$a+d$

Если мы замѣнимъ въ немъ буквы a, b, c, d, e и f числами 1, 2, 4, 8, 16 и 32 въ произвольномъ порядкѣ, и затѣмъ прибавимъ на каждую клѣтку по единицѣ, то получимъ полный волшебный квадратъ. Такъ какъ такихъ квадратовъ можетъ быть составлено столько, сколько можно сдѣлать перестановокъ изъ 6-ти чиселъ, именно $P_6 = 6! = 720$, и каждый квадратъ даетъ вмѣстѣ съ собою еще 64 квадрата, то наша схема даетъ $64P_6 = 64 \times 720 = 46\,080$ квадратовъ. Нельзя, однако, сказать, чтобы она исчерпывала собою всевозможные полные квадраты о 64 клѣткахъ. И дѣйствительно, оставляя,

напр., 3 первыхъ элементарныхъ квадрата прежними и замѣняя 3 послѣднихъ квадрата такими:

	d		d		d		d
d	d	d	d				
	d		d		d		d
				d	d	d	d
d		d		d		d	
d	d	d	d				
d		d		d		d	
				d	d	d	d

	e		e	e		e	
	e		e	e		e	
e		e			e		e
e		e			e		e
	e		e	e		e	
	e		e	e		e	
e		e			e		e
e		e			e		e

	f	f		f			f
	f	f		f			f
f			f		f	f	
f			f		f	f	
	f	f		f			f
	f	f		f			f
f			f		f	f	
f			f		f	f	

мы, по соединеніи этихъ 6-ти квадратовъ, получаемъ новую схему полныхъ квадратовъ такого рода:

В...

	a+d +e+f	a+c +f	c+d +e	a+b +e+f	b+d	b+c +e	a+b +c+d +f
a+b +d	b+d +c+f	b+c +d+f	a+b +c+d +e	e+f	a	a+c +e	c+f
a+e +f	d	c+c	a+c +d+f	b	a+b +d+e +f	a+b +c+f	b+c +d+e
b+e +f	a+b	a+b c+e	b+c +f	a+d	d+e +f	c+d +f	a+c +d+e
c+d	a+c +e+f	a+d +f	c	a+b +c+d +e+i	b+c	b d +c	a+b +f
a+b +c+d	b+c +d+e +f	b+d +f	a+b +d+e	c+e +f	a+c	a+c	f
a+c +d+e +f	c	d+e	a+f	b+c +d	a+b +c+e +f	a+b +d+f	b+e
b+c +e+f	a+b +c	a+b +e	b+f	a+c +d	c+d +e+f	d+f	a+b +e

и эта схема удовлетворяетъ тѣмъ же условіямъ, что и (А).

2. Но схема (А) отличается, однако, отъ схемы (В) тѣмъ, что она можетъ быть обобщена въ новую схему, захватывающую собою не только всѣ полные квадраты схемы (А), но и массу неполныхъ квадратовъ, и это дѣлается такимъ образомъ. Разбивъ квадратъ (А) на 2 другіе квадрата, изъ которыхъ

въ первый выдѣлимъ всѣ сочетанія буквъ *a*, *b* и *c*, а во второй—всѣ комбинаціи остальныхъ буквъ *d*, *e* и *f*, мы получимъ 2 такіе квадрата:

	a	a+c	a+c	a+b	b	b+c	a+b+c
a+b	b	b+c	a+b+c		a	a+c	c
a		c	a+c	b	a+b	a+b+c	b+c
b	a+b	a+b+c	b+c	a		c	a+c
c	a+c	a		a+b+c	b+c	b	a+b
a+b+c	b+c	b	a+b	c	a+c	a	
a+c	c		a	b+c	a+b+c	a+b	b
b+c	a+b+c	a+b	b	a+c	c		a

	d+e	d	e	f	d+e+f	d+f	e+f
d	e		d+e	d+f	e+f	f	d+e+f
d+f	e+f	f	d+e+f	d	e		d+e
f	d+e+f	d+f	e+f		d+e	d	e
d+e		e	d	d+e+f	f	e+f	d+f
e	d	d+e		e+f	d+f	d+e+f	f
e+f	d+f	d+e+f	f	e	d	d+e	
d+e+f	f	e+f	d+f	d+e		e	d

Замѣнимъ въ первомъ квадратѣ величины 0 (т. е. пустую клѣтку), a, $a+c$, c, $a+b$, b, $b+c$ и $a+b+c$ соотвѣтственно черезъ a, b, c, d, e, f, h, а величины второго квадрата, именно: 0, $d+e$, d, e, f, $d+e+f$, $d+f$ и $e+f$, соотвѣтственно же, замѣнимъ черезъ **a**, **b**, **g**, **d**, **e**, **h**, **z** и **r**, тогда мы получимъ 2 квадрата, наложеніе другъ на друга которыхъ составитъ, наконецъ, схему (C).

a	b	c	d	e	f	g	h
e	f	g	h	a	b	c	d
b	a	d	c	f	e	h	g
f	e	h	g	b	a	d	c
d	c	b	a	h	g	f	e
h	g	f	e	d	c	b	a
c	d	a	b	g	h	e	f
g	h	e	f	c	d	a	b

a	b	g	d	e	h	z	r
g	d	a	b	z	r	e	h
z	r	e	h	g	d	a	b
e	h	z	r	a	b	g	d
b	a	d	g	h	e	r	z
d	g	b	a	r	z	h	e
r	z	h	e	d	g	b	a
h	e	r	z	b	a	d	a

C...

a+a	b+b	c+g	d+d	e+e	f+h	g+z	h+h
e+g	f+d	g+a	h+b	a+z	b+r	c+e	d+h
b+z	a+h	d+e	c+h	f+g	e+d	h+a	g+b
f+e	e+h	h+z	g+h	b+a	a+b	d+g	c+d
d+b	c+a	b+d	a+g	h+h	h+e	f+h	e+z
h+h	g+g	f+b	e+a	d+h	c+z	b+h	a+e
c+h	d+z	a+b	b+e	g+d	h+g	e+b	f+a
g+h	h+e	e+h	f+z	c+b	d+a	a+d	b+g

Эта схема даетъ, кромѣ полныхъ квадратовъ схемы (А), еще массу неполныхъ квадратовъ. Для нея мы имѣемъ 20 двойныхъ рядовъ чиселъ, которые можно получить по способу, указанному выше, въ статьѣ о среднихъ волшебныхъ квадратахъ съ 16-ю клѣтками, и которые приведены въ нижеслѣдующей таблицѣ.

№	Р Я Д Ы.	
	Лѣвая половина.	Правая половина.
1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56
2	1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
3	1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12	0, 4, 16, 20, 32, 36, 48, 52
4	1, 5, 17, 21, 33, 37, 49, 53	0, 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11
5	1, 2, 3, 4, 17, 18, 19, 20	0, 4, 8, 12, 32, 36, 40, 44
6	1, 5, 9, 13, 33, 37, 41, 45	0, 1, 2, 3, 16, 17, 18, 19
7	1, 2, 3, 4, 33, 34, 35, 36	0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28
8	1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29	0, 1, 2, 3, 32, 33, 34, 25
9	1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14	0, 2, 16, 18, 32, 34, 48, 50
10	1, 3, 17, 19, 33, 35, 49, 51	0, 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13
11	1, 2, 5, 6, 17, 18, 21, 22	0, 2, 8, 10, 32, 34, 40, 42
12	1, 3, 9, 11, 33, 35, 41, 43	0, 1, 4, 5, 16, 17, 20, 21
13	1, 2, 5, 6, 33, 34, 37, 38	0, 2, 8, 10, 16, 18, 24, 26
14	1, 3, 9, 11, 17, 19, 25, 27	0, 1, 4, 5, 32, 33, 36, 37
15	1, 2, 9, 10, 17, 18, 25, 27	0, 2, 4, 6, 32, 34, 36, 38
16	1, 3, 5, 7, 33, 35, 36, 39	0, 1, 8, 9 16, 17, 24, 25
17	1, 2, 9, 10, 32, 34, 41, 42	0, 2, 4, 6, 16, 18, 20, 22
18	1, 3, 5, 7, 17, 19, 21, 23	0, 1, 8, 9, 32, 33, 40, 41
19	1, 2, 17, 18, 33, 34, 49, 50	0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14
20	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15	0, 1, 16, 17, 32, 33, 48, 49

Ряды эти примѣняются для составленія квадратовъ такимъ образомъ: выбравши какой-либо рядъ, латинскія буквы схемы приравниваютъ числамъ лѣвой половины его, взятымъ тоже въ произвольномъ порядкѣ, а жирныя буквы схемы приравниваютъ числамъ правой половины его, взятымъ тоже въ произвольномъ порядкѣ, и тогда получается всегда неполный квадратъ, а въ частныхъ случаяхъ могутъ получаться и полные. Число всѣхъ квадратовъ, даваемыхъ послѣднею схемою, будетъ:

$$20 \cdot 8!8! = 20\,(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8)^2 = 20 \cdot 40\,320^2 =$$
$$= 20 \cdot 1\,625\,702\,400 = 32\,514\,048\,000,$$

такъ что даже $^1/_8$ этого числа (принимая во вниманіе квадраты, получаемые поворачиваніемъ и переворачиваніемъ), и та будетъ громадна, именно: 4 064 256 000, т. е. 4 слишкомъ милліарда!

